

Kombinatorika és gráfelmélet I
Nyílt helyi, 2020. május 8, 9.00-12.00

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozathoz. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

A megoldásokat küldjék el 12.00 **előtt** a **geza@renyi.hu** címre! Kérem, olvashatóan írjanak, aki kézzel, az viszonylag nagy betűkkel és mindenki minden oldalra írja rá a nevét!

Minden írott anyag használható.

Az aláíráshoz 40%-ot kell elérni. Jó munkát!

1. A G teljes gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 2$. Az $u_i u_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) élek súlya 1, a $v_i v_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) élek súlya 2, az $u_i v_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) élek súlya x , ahol $x > 0$ (nem feltétlenül egész).

a. Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa $S(x)$ összsúlyát x függvényében.

b. Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfák számát, ha $x = 3$.

a. Tudjuk, hogy a mohó algoritmus megtalálja a minimális feszítőfát. Úgyhogy azt fogjuk követni. 1 pont

Legyen $0 < x \leq 1$. Ekkor a mohó algoritmus az x súlyú $u_i v_j$ éleket választja ($x = 1$ esetén választHATja) amíg lehet. De mást nem is kell választania, csupa x súlyú élből el lehet érni a feszítőfáig. Ennek $2n - 1$ éle van, tehát a súlya $(2n - 1)x$. 2 pont

Most legyen $1 \leq x \leq 2$. Ekkor a mohó algoritmus az 1 súlyú $u_i u_j$ éleket választja ($x = 1$ esetén választHATja) amíg lehet. Ekkor lesz egy feszítőfánk az u_1, u_2, \dots, u_n csúcsokon. Ezután az az x súlyú $u_i v_j$ éleket választja ($x = 2$ esetén választHATja) és ezzel el is érjük a feszítőfát. Ennek $n - 1$ 1 súlyú és n x súlyú éle van, tehát a súlya $n - 1 + nx$. 2 pont

Végül legyen $2 \leq x$. Ekkor először az 1 súlyú $u_i u_j$ éleket választjuk ($x = 1$ esetén választHATjuk) amíg nem kapunk egy feszítőfát az u_1, u_2, \dots, u_n csúcsokon. Utána jönnek ($x = 2$ -re jöHETnek) a 2 súlyú $v_i v_j$ élek, amíg nem kapunk egy feszítőfát a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon. Végül behúzzunk egyetlen x súlyú élt, ami összeköti a két feszítőfát. Ennek a súlya $1(n - 1) + 2(n - 2) + x = 3(n - 1) + x$. 2 pont

b. Ha $x = 3$, akkor tehát a minimális feszítőfa két feszítőfa uniója az u_1, u_2, \dots, u_n csúcsokon illetve a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon, és egy tetszőleges összekötő él. Az u_1, u_2, \dots, u_n csúcsokon n^{n-2} , a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon is n^{n-2} feszítőfa van, összekötő él pedig n^2 darab van. Tehát $n^{n-2} \cdot n^{n-2} \cdot n^2 = n^{2n-2}$ minimális feszítőfa van. 3 pont

2. A G 8 pontú gráf két darab háromszög és egy él diszjunkt uniója. Minimálisan hány élt kell hozzávenni G -hez, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler köre?

Akkor és csak akkor van Euler kör, ha minden foksám páros és a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő. Jelenleg a háromszögekben levő csúcsok foksámai párosak, a másik két csúcs foksáma páratlan. Viszont három összefüggő komponens van, két háromszög és egy él. 1 pont

Világos, hogy minden összefüggő komponensből indítani kell egy élt, hogy összefüggővé tegyük a gráfot. 1 pont

Nézzük most a háromszög komponenseket. Ha csak egy él megy valamelyikből, akkor egy csúcs foksáma páratlan lesz. Tehát mindkét háromszög komponensből legalább két él indul. 2 pont

Most nézzük az él komponenst. Itt minden csúcs foka 1, tehát mindkét csúcsból indulnia kell egy új élnek. Vagyis ebből a komponensből is legalább két él indul. 2 pont

Vagyis összesen legalább 6 él indul a komponensekből, ezért legalább 3 élt kell behúzni. 1 pont

Ennyi él elég is. Legyen az egyik háromszög egyik csúcsa a , a másik háromszög egyik csúcsa b , a külön él két vége c és d . Húzzuk be az ca , ab és bc éleket. A kapott gráf összefüggő és minden fokszám páros, tehát van Euler köre. 3 pont

3. A G , s , t , c hálózatban az e_1 és e_2 élek kapacitása $c(e_1) = x$, $c(e_2) = y$. A többi él kapacitása adott, nem függ x -től és y -től. Tetszőleges $x, y > 0$ esetén legyen $M(x, y)$ a maximális folyam nagysága. Tudjuk, hogy $M(1, 100) = 1$, $M(100, 1) = 1$, $M(100, 100) = 10$.

Határozzuk meg $M(2, 2)$ értékét.

Négy féle vágást kell megkülönböztetnünk, aszerint, hogy e_1 illetve e_2 benne van-e. Mivel $M(1, 100) = 1$, $x = 1$, $y = 100$ esetén van egy 1 kapacitású vágás. Ebben nem lehet benne e_2 , mert 100 a kapacitása. Ha e_1 sincs benne, akkor $M(100, 100)$ is 1 lenne, nem 10. Tehát e_1 benne van. De neki 1 a kapacitása, tehát van egy CSAK e_1 -ből álló vágás. 3 pont

Hasonlóan, mivel $M(100, 1) = 1$, van egy CSAK e_2 -ből álló vágás is. 1 pont

Viszont mivel $M(100, 100) = 10$, van egy e_1 és e_2 nélküli, 10 kapacitású vágás, de kisebb nincs. 3 pont

Tehát, ha $x = y = 2$, akkor a minimális vágás kapacitása 2, ezért $M(2, 2) = 2$. 3 pont

4. A G gráf csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{36} , v_i és v_j , $1 \leq i < j \leq 36$, akkor és csak akkor van összekötve, ha $i \cdot j$ osztható 12-vel. Határozzuk meg $\kappa(G)$ -t, G pontösszefüggőségi számát.

A v_{12} , v_{24} és v_{36} minden más csúcscsal össze van kötve. Ezért, ha elhagyunk néhány csúcsot, de e három csúcscból bármelyik megmarad, akkor a gráf összefüggő marad. Vagyis ahhoz, hogy szétesen a gráf, ezt a három csúcsot mindenképpen el kell hagyni. Tehát $\kappa(G) \geq 3$ 5 pont

Ugyanakkor ha ezt a három csúcsot elhagyjuk, akkor például v_5 izolált ponttá válik, szétesett a gráf. Tehát $\kappa(G) = 3$ 5 pont

5. G -nek 100 csúcsa van, a független élek maximális száma, $\nu(G) = 10$. Bizonyítsuk be, hogy G kromatikus száma, $\chi(G) \leq 21$.

Vegyünk 10 független élt. A végpontjaik legyenek v_1, \dots, v_{20} , a többi csúcs v_{21}, \dots, v_{100} . Mivel nincs több független él ($\nu(G) = 10$), ezért v_{21}, \dots, v_{100} között nincs él. 6 pont

Tehát színezzük ki a v_1, \dots, v_{20} csúcsokat csupa különböző színnel, a v_{21}, \dots, v_{100} csúcsokat meg egy 21-ik színnel. Ez biztosan jó színezés, tehát $\chi(G) \leq 21$. 4 pont

6. A G 16 csúcsú gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 4$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha

(1) $i = k$ és $j \neq l$, vagy (2) $j = l$ és $i \neq k$.

Bizonyítsuk be, hogy G nem síkgráf.

1. Megoldás: Legyen $v_{i,j}$ tetszőleges csúcs. A szomszédai azok a $v_{k,l}$ csúcsok, ahol $i = k$ és $j \neq l$, ez 3 csúcs, és ahol $j = l$ és $i \neq k$, ez is 3 csúcs. Tehát minden pont foka 6. Viszont tudjuk, hogy egy síkgráfban a minimális fokszám legfeljebb 5, ezért G nem lehet síkgráf. 10 pont

A vége másképp: Tehát G -nek 16 csúcsa és 48 éle van, vagyis nem teljesül, hogy $e \leq 3n - 6$, így nem lehet síkgráf.

2. Megoldás: Vegyük a $v_{1,1}$, $v_{1,2}$, $v_{1,3}$, $v_{1,4}$ csúcsokat, ezek közül bármely kettő szomszédos. Ez eddig egy K_4 . Most vegyük a $v_{2,1}$ csúcsot. Ez szomszédos $v_{1,1}$ -gyel. A másik hárommal megöszeköti a $v_{2,1}v_{2,2}v_{1,2}$, $v_{2,1}v_{2,3}v_{1,3}$, illetve a $v_{2,1}v_{2,4}v_{1,4}$ út. Tehát találtunk egy topologikus K_5 -öt, ami bizonyítja, hogy nem síkgráf. 10 pont