Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2020. április 13-17.

Kromatikus szám

Tudnivalók

$\chi(G)$: G kromatikus száma, G csúcsainak a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két összekötött pont különböző színű.)

$\Delta(G)$: maximális fokszám G-ben. $\omega(G)$: G klikkszáma, a legnagyobb teljes részgráf mérete.

Minden G gráfra $\omega(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$.

Brooks tétel: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \le \Delta(G)$.

gyenge Brooks tétel: Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Minden pozitív egész k ra létezik olyan G_k gráf, melyre $\omega(G_k) = 2$, és $\chi(G_k) = k$.

Zykov konstrukció: Legyen Z_2 a teljes két csúcsú gráf. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a Z_k gráfot. Legyen Z_{k+1} a következő gráf. Vegyük Z_k k darab diszjunkt példányát. Ezek után minden lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot mindegyik példányból, vegyünk fel ehhez a k-ashoz egy új csúcsot, es kössük össze a k-as elemeivel. Ekkor minden k-ra $\omega(Z_k) = 2$ és $\chi(Z_k) = k$.

Shift gráf: Legyen $m > 1$ rögzített. Legyenek S_m csúcsai az (i, j) számpárok, ahol $1 \le i < j \le m$. Két csúcs, (i, j) és (a, b) össze van kötve G-ben akkor és csak akkor, ha $j = a$ vagy $i = b$. Ekkor minden m-re $\omega(S_m) = 2$ és $\chi(S_m) \ge \log_2 m$.

1. Van-e a Z_k Zykov gráfnak Hamilton-köre?

   Megoldás: Z_2-nek nyilván nincs, Z_3-nak meg van. Legyen $k > 3$ és legyen n_k Z_k pontjainak a száma. Hagyjuk el a Z_k-ban levő $k-1$ darab Z_{k-1}-et, ez $(k-1)n_{k-1}$ pont. Maradt n_{k-1}^{k-1} izolált pont. Viszont $n_{k-1}^{k-1} > (k-1)n_{k-1}$ mivel $n_{k-1}^{k-2} > (k-1)$. (Sokkal nagyobb. Már abból is látszik, hogy $n_{k-1} \ge n_3 = 8$ és $k > 3$.) Tehát nincs Z_k-nak Hamilton köre.

2. (Mycielski konstrukció) Legyen $M_2 = K_2$. Tegyük fel, hogy $k \ge 2$ és már meghatároztuk az M_k Mycielski gráfot. Legyenek M_k csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Az M_{k+1} gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_m$, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ és w. A $v_1, v_2, \ldots, v_m$ csúcsok éppen az M_k Mycielski gráfot feszítik, az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ csúcsok között nincs él, egy u_i és egy v_j csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha v_i és v_j össze van kötve. Végül pedig w-t kössük össze az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ csúcsokkal. Így kaptuk az M_k Mycielski gráfot.
   a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k-ra $\omega(M_k) = 2$, vagyis M_k nem tartalmaz háromszöget.
   b. Bizonyítsuk be, hogy minden k-ra $\chi(M_k) = k$.

   Megoldás: Ez benne van a tankönyvben (Katona-Recski-Szabó), jegyzetben (Fleiner), meg még 1000 helyen.

3. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler-körsétát, és melyeknek van Hamilton-körük?

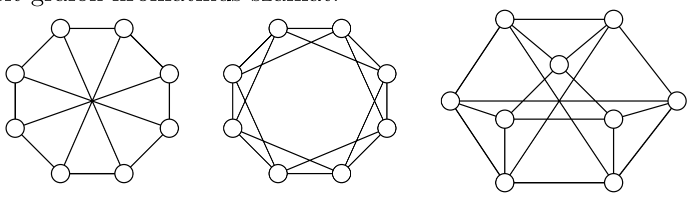
   Megoldás: Euler: $M_2 = K_2$-ben nyilván nincs. $M_3 = C_5$, 5 hosszú kör, ennek van. Könnyen látszik, hogy $|M_k| = 2|M_{k-1}| + 1$, páratlan, ha $k \ge 3$, és amikor M_k-t konstruáljuk, w foka éppen $|M_{k-1}|$, páratlan, ha $k \ge 4$, tehát nincs benne Euler kör.

   Hamilton: $M_2 = K_2$-ben nyilván nincs. $M_3 = C_5$, 5 hosszú kör, ennek van. Innen pedig viszonylag könnyen látszik indukcióval, hogy minden $k \ge 3$-ra M_k-nak van Hamilton köre.

4. Van-e az $\binom{m}{2}$ pontú S_m shiftgráfnak Euler-körsétája?

   Megoldás: S_2-nek nyilván nincs. Ha $m \ge 3$, akkor a $(2, m)$ csúcs fokszáma 1, egyetlen szomszédja az $(1, 2)$. Tehát nincs.

5. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!



Megoldás: 1. Van benne 5 hosszú kör, úgyhogy $\chi \geq 3$. Viszont 3 színnel könnyedén ki lehet színezni, körben $1,2,3,1,2,3,1,2$. Vagy: a gráf 3-reguláris, ezért a Brooks tétel alapján $\chi \leq 3$.

2. Van benne háromszög, tehát $\chi \geq 3$. Próbáljuk meg kiszínezni 3 színnel: feltehetjük, hogy az egyik csúcs 1 színű, a mellette levő 2 színű. Ekkor a következő csak 3 színű lehet, az utána következő csak 1 színű lehet, és így tovább, de mire körbe érünk, (mivel 8 nem osztható 3-mal) nem jól fejeződik be a színezés. Tehát 3 szín nem elég. 4 színnel viszont gyerekjáték kiszínezni: $1,2,3,4,1,2,3,4$.

3. $\chi \geq 3$ mert tartalmaz háromszöget. Próbáljuk meg 3 színnel kiszínezni. Feltehetjük, hogy a középső három pont színe $1,2,3$. Mondjuk a felső az 1 színű. Ekkor a jobb felső 2 vagy 3 színű. Mindkét esetben csak egyféleképpen színezhetjük ki a többi csúcsot, de az is rossz lesz. 4 szín viszont elég, könnyű kiszínezni, meg ott van a jo öreg Brooks tétel is.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Megoldás: Vegyük egy színezését a gráfnak az $1,2,\ldots,\chi(G)$ színekkel. Bárhogy veszünk két színosztályt, kell, hogy fusson közük él, ellenkező esetben egyesíthetnénk a két színt és kapnánk egy jó színezést $\chi(G)-1$ színnel. Ez legalább $\binom{\chi(G)}{2}$ különböző él, tehát $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.

Megoldás: 1. Nyilán kell legalább $\max\{\chi(K), \chi(H)\}$ szín. Ennyi elég is, mert a két komponensben nyugodtan használhatjuk ugyanazokat a színeket.

2. Itt K-ben és H-ban csupa különböző színt kell használnunk. K-hoz legalább $\chi(K)$ színt, H-hoz legalább $\chi(H)$ színt, tehát összesen legalább $\chi(K)+\chi(H)$ színt.

8. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

Megoldás: Legyen c_1 G_1 színezése $\chi(G_1)$ színnel, c_2 G_2 színezése $\chi(G_2)$ színnel. Most legyen minden v csúcsra v színe $(c_1(v), c_2(v))$. Minden G-beli él G_1-ben vagy G_2-ben van, ezért ha u és v szomszédosak G-ben, akkor $(c_1(u), c_2(u)) \neq (c_1(v), c_2(v))$. Tehát ez egy jó színezés $\chi(G_1)\chi(G_2)$ színnel.

9. Legyenek G csúcsai az $1,2,\ldots,2^n-1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

Megoldás: Az $1,2,\ldots 2^{n-1}$ csúcsok egy klikket alkotnak, tehát $\chi \geq n$. De n szín elég is: minden $0 \leq i \leq n-1$-re színezzük ki a 2^i és $2^{i+1}-1$ közti számokat az $i+1$-ik színnel.

10. Legyen $V(G) = \{1,2,3,\ldots,100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i-j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

Megoldás: Bármelyik 8 egymás utáni szám klikket alkot, tehát $\chi \geq 8$. Viszont 8 szín elég, színezzuk periodikusan. (i színe legyen i mod 8)

11. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

Megoldás: Ló: Egy szín nyilván nem eleg, 2 igen, a standard sakktábla-színezés jó.

Bástya: Egy oszlop (vagy sor) egy klikket alkot, ezért $\chi \geq 8$. Ennyi színnel ki is lehet színezni, legyen az (i,j) mező színe $i+j$ mod 8.

Futó: Egy főátló klikket alkot, tehát $\chi \geq 8$. Ennyi szín viszont elég: színezzünk minden oszlopot más színűre.

Király: Az $A1, A2, B1, B2$ mezők egy 4-es klikket alkotnak, tehát $\chi \geq 4$. Ennyi színnel ki is lehet színezni, legyen az (i, j) mező színe ($i \bmod 2, j \bmod 2$).

12. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

    Megoldás: Tegyük fel, hogy nincs az egyenesek közt függőleges. Színezzünk a szokásos mohó módszerrel, balról jobbra, vagyis a metszéspontok x-koordinátája szerinti sorrendben. Minden aktuális metszéspontnak (csúcsnak) csak két *kiszínezett* szomszédja van, ezért 3 szín elég lesz.

13. Mutassunk olyan 6 csúcsú G gráfot, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel.

    Megoldás: C_5 és egy pont, ami ezzel az öt ponttal össze van kötve.

14. Mutassuk meg, hogy minden G gráfra, ha a mohó színezést megfelelő csúcs-sorrendben végezzük, akkor optimális színezést ad, azaz $\chi(G)$ színnel színezi ki G-t.

    Megoldás: Vegyünk egy színezést az $1, 2, \ldots, \chi(G)$ színekkel. Ha valamilyen i-re van olyan i-színű pont, amit átszínezhetünk kisebb színűre, akkor ne habozzunk, színezzük át. Ezt ismételjük, amíg el nem akadunk. (Minden lépésben csökken a pontok színeinek az összege, tehát egyszer elakadunk.) Ezt a K (Kedvenc) színezést tekintve, rakjuk sorba a pontokat emelkedő (nem csökkenő) szín sorrendben. Ebben a sorrendben mohón színezve éppen a K (Kedvenc) színezést fogjuk visszakapni.

    Ez a pontokra vonatkozó indukcióval látható. Ha a v csúcsot színezzük éppen, és az indukciós feltevés alapján a már kiszínezett csúcsok épp a Kedvenc színezés szerint vannak színezve, akkor v-t mindenképpen ki tudjuk színezni a Kedvenc szerinti színére. Ha ennél kisebb színt is kaphatna, akkor a Kedvenc színezésben is v átszínezhettük volna egy kisebb színűre, ami ellentmont a Kedvenc színezés választásának.

15. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésében bármely színosztálynak van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.

    Megoldas: Tegyük fel, hogy a libazöld színosztály minden csúcsához van olyan szín, amilyen színű szomszédja nincsen. Ekkor minden egyes libazöld csúcsot átszínezhetünk arra a bizonyos hiányzó színre. Például, ha a v libazöld csúcsnak nincs epesárga szomszédja, akkor színezzük át v-t libazöldről epesárgára. Ez továbbra is egy jó színezés. Így meg tudtuk szüntetni a libazöld színosztályt, ami ellentmondás, mert egy optimális színezésből indultunk ki.

16. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.

    Megoldas: Színezzük ki G-t az $1, 2, \ldots, \chi(G)$ színekkel és minden élt irányítsunk a nagyobb sorszámú színnel rendelkező csúcs felé.

17. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
    Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)

    Megoldas: 1. Színezzük ki G-t $\chi(G)$ színnel, legyen egy tetszőleges v csúcs színe $c(v)$. Színezzük ki $\overline{G}$-t $\chi(\overline{G})$ színnel, legyen egy tetszőleges v csúcs színe $\overline{c}(v)$. Most vegyük a $G \cup \overline{G} = K_n$ teljes gráf következő színezését: legyen egy tetszőleges v csúcs színe $(c(v), \overline{c}(v))$. Ez egy jó színezés, $\chi(G)\chi(\overline{G})$ színnel, mert minden él két végpontján vagy c, vagy $\overline{c}$ különbözik. Viszont $\chi(K_n) = n$, ezért $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

    2. Indukcióval bizonyítunk n-re, $n = 1, 2$ esetekben az állítás triviális. Legyen $n > 2$ es tegyük fel, hogy kisebb értékekre már belattuk az állítást. Legyen v az egyik csúcs. Az indukciós feltevés szerint $\chi(G \setminus v) + \chi(\overline{G} \setminus v) \leq n$. Adjuk hozzá mindkét gráfhoz v-t. Ezzel mindkét gráf kromatikus száma legfeljebb eggyel nőtt. Ha legfeljebb az egyik gráf kromatikus száma nőtt, akkor $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \chi(G \setminus v) + \chi(\overline{G} \setminus v) + 1 \leq n + 1$ és kész vagyunk. Tegyük fel, hogy mindkettőé nőtt. Ekkor is készen vagyunk, ha $\chi(G \setminus v) + \chi(\overline{G} \setminus v) \leq n - 1$. Tehát tegyük fel azt is, hogy $\chi(G \setminus v) + \chi(\overline{G} \setminus v) = n$. Ekkor v foka G-ben legalább $\chi(G \setminus v)$, és v foka $\overline{G}$-ben legalább $\chi(\overline{G} \setminus v)$, vagyis v foka összesen legalább n, ami ellentmondás, mert egy n csúcsú gráfban vagyunk, v foka összesen $n - 1$.

18. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.

    Megoldás: Egy ország, körülvéve 5 országgal, amik egy 5 hosszú kört alkotnak, könnyen megvalósítható, ennek kromatikus száma 4.

19. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.

    Megoldás: 1. Vegyük be egyesével az egyeneseket. Amikor beveszünk egy új egyenest, akkor az egyik oldalán minden pont (vagy tartomány) színét változtassuk az ellenkezőjére.

    2. Tegyük fel, hogy nincs az egyenesek között függőleges. Egy tetszőleges p pont színe legyen fehér, ha alatta páros sok egyenes van, és fekete, ha páratlan sok.

20. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.

    Megoldás: 1. Vegyük ezt a zárt γ görbét, amely végighalad minden országhatáron egyszer. Egy tetszőleges p pont színe legyen fehér, ha a γ görbe páros sokszor kerüli meg, és fekete, ha páratlan sokszor.

    2. A többszörös határpontokat csúcsnak, a határvonalakat élnek tekintve, a feltétel szerint az kapott gráfnak van Euler köre. Egy Euler kör körök éldiszjunkt uniója. A köröket egyesével vegyük be, és a belsejében mindig invertáljuk a színezést.

21. (*) Tegyük fel, hogy az n csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, azaz bármely két 3-színezésében ugyanazok a színosztályok. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább $2n-3$ éle van.

    Megoldás: Vegyünk egy 3-színezést, piros, fehér, zöld színekkel, legyen x, y, z a három színoszály mérete. Vegyük észre, hogy bármely két színosztály összefüggő gráfot feszít, különben az egyik komponensben megcserélhetnénk a két szint. Ezért a piros-fehér élek száma legalább $x+y-1$, a piros-zöld éleké legalább $x+z-1$, a fehér-zöld éleké legalább $y+z-1$, összesen legalább $2x+2y+2z-3=2n-3$ élünk van.

22. Legyenek a G (végtelen) gráf csúcsai a sík pontjai, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha egységtávolságot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy $4 \leq \chi(G) \leq 7$.

    $\chi(G)$ meghatározása a híres Hadwiger-Nelson probléma, $\chi(G)$-t szokás a sík kromatikus számának is hívni. A legjobb ismert korlátok: $5 \leq \chi(G) \leq 7$.

    Megoldás: Ez nagyon sok helyen megtalálható, pl a wikipedián, úgyhogy nem érdemes ideírni a megoldást.

Házi feladatok

1. Határozzuk meg az olyan n csúcsú G gráfok élszámának a maximumát, amelyekre $\chi(G) \leq 3$.

2. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

3. A G gráf csúcsai $v_1, \ldots, v_{100}$. A v_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $1 \leq |i-j| \leq 3$ vagy $|i-j| = 16$. Határozzuk meg $\chi(G)$-t, G kromatikus számát.