Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2020. április 6-10.

görög betűk, Kőnig, Gallai

Tudnivalók

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Kőnig tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. (b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

Gallai tétel: (a) Ha G–ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma. (b) Ha G–ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

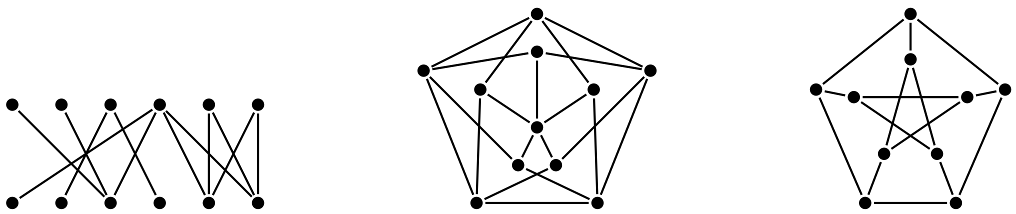
Frobenius tétel: Legyenek A és B a G páros gráf színosztályai. Pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Hall Tétel: Pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

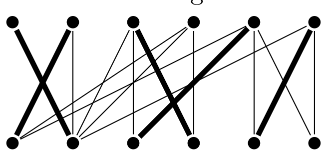
Tutte tétel: A G véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges X csúcshalmazra $G - X$-nek legfeljebb $|X|$ páratlan komponense van: $c_p(G - X) \leq |X|$ $\forall X \subseteq V$ esetén.

	max fuggetlen	min lefogo	Konig, ps graf	
pont	α +	τ	$=n$	Gallai nincs hurokel
el	ν +	ρ	$=n$	Gallai nincs iz pont
			Konig ps graf, nincs iz pont	

1. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



2. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.
3. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!
4. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?
5. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.
6. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



7. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.
8. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.
9. Egy 100 csúcsú egyszerű G gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

Házi feladat

1. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?
2. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{1000}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| < 7$. Határozzuk meg $\kappa(G)$-t, G pontösszefüggőségi számát.
3. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{1000}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| = 1$, 3, vagy 5. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.