

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2020. április 6-10.  
görög betűk, Kőnig, Gallai

## Tudnivalók

$\alpha(G)$ : független pontok maximális száma;  $\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$ : független élek maximális száma;  $\rho(G)$ : lefogó élek minimális száma.

**Kőnig tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ . (b) Ha  $G$  páros és nincs izolált pontja, akkor  $\alpha(G) = \rho(G)$ .

**Gallai tétel:** (a) Ha  $G$ -ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\tau(G) + \alpha(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma. (b) Ha  $G$ -ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\nu(G) + \rho(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma.

Ha  $X$  a  $G = (V, E)$  gráf csúcsainak részhalmaza akkor  $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$  az  $X$  halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

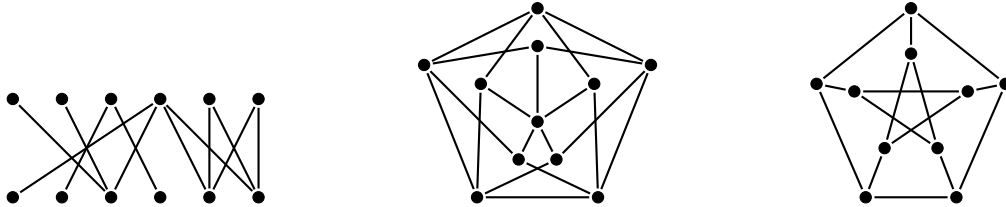
**Frobenius tétel:** Legyenek  $A$  és  $B$  a  $G$  páros gráf színosztályai. Pontosán akkor létezik  $G$ -nek teljes párosítása, ha  $|A| = |B|$  és az  $A$  színosztály pontjainak tetszőleges  $X$  részhalmazára  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Hall Tétel:** Pontosán akkor létezik  $G$ -nek  $A$ -t fedő párosítása, ha az  $A$  színosztály pontjainak tetszőleges  $X$  részhalmazára  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Tutte tétel:** A  $G$  véges gráfban pontosán akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges  $X$  csúcshalmazra  $G - X$ -nek legfeljebb  $|X|$  páratlan komponense van:  $c_p(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$  esetén.

	max független	+ min lefogo		König, ps graf
pont	$\alpha$	+	$\tau$	$=n$ Gallai nincs hurokel
el	$\nu$	+	$\rho$	$=n$ Gallai nincs iz pont
				König ps graf, nincs iz pont

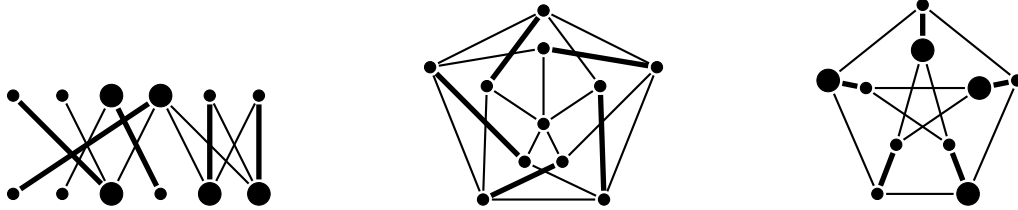
1. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\alpha(G)$  értékeket!



*Megoldás:* 1. Már láttuk az előző feladatsorban, hogy  $\nu = 5$ , mivel páros gráf, nincs izolált pont, hurokél, alkalmazhatjuk Kőnig és Gallai tételeit,  $\tau = \nu = 5$ ,  $\rho = 12 - \nu = 7$ ,  $\alpha = 12 - \tau = 7$ .

2. A gráfnak 11 csúcsa van és tartalmaz 5 független élet (ábra) több meg nem lehet, mert 6 független élnek már 12 végpontja lenne. Tehát  $\nu = 5$ . Ebből, Gallai tétele alapján  $\rho = 11 - 5 = 6$ . Sajnos a Kőniget nem alkalmazhatjuk, mert nem páros a gráf. Ha független ponthalmazt akarunk kiválasztani és a középső pontot bevesszük, akkor a többi a külső 5 hosszú körről van, de onnan legfeljebb 2-t választhatunk. Ha nem vesszük be a középsőt, akkor kivehetjük a szomszédait, ez 5 pont. Többet ekkor sem választhatunk, mert az 5 független él (ábra) mindegyikének csak az egyik végét választhatjuk. Tehát  $\alpha = 5$ , és a Gallai miatt  $\tau = 6$ .

3. Itt  $\nu = 5$ , ennyi független él van (ábra), több meg nem fér el, mert 10 csúcs van. Tehát  $\rho = 5$  (Gallai). Ha független ponthalmazt akarunk kiválasztani, a külső körről is legfeljebb 2 pontot választhatunk és a belsőről is. Ennyit lehet is (ábra). Gallai alapján ekkor  $\tau = 6$ .



2. Legyen  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg  $\alpha(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\tau(G)$  értékeit.

*Megoldás:* Csoportosítsuk a pontokat az indexük 3-as maradéka szerint:  $V_0, V_1, V_2$ , mindháromban 668 csúcs van. A  $V_0$  és  $V_1$  között egy teljes páros gráf van ( $V_0$  és  $V_1$  között minden él be van húzva), a  $V_2$  pedig egy teljes gráfot feszít ( $V_2$ -n belül minden él be van húzva). Nézzük külön először a  $V_0$  és  $V_1$  közötti egy teljes páros gráfot. Itt  $\nu = \tau = \alpha = \rho = 668$ . Most nézzük a  $V_2$  által feszített teljes gráfot. Itt  $\nu = 334$ ,  $\rho = 334$ ,  $\tau = 667$ ,  $\alpha = 1$ . A megfelelő paramétereket összeadva:  $\nu(G) = 1002$ ,  $\rho(G) = 1002$ ,  $\tau(G) = 1335$ ,  $\alpha(G) = 669$ .

3. Legyen  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{74}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  és 74 relatív prímekek. Határozzuk meg az  $\alpha(H)$ ,  $\nu(H)$ ,  $\rho(H)$ ,  $\tau(H)$  értékét!

*Megoldás:* A fő megfigyelés: ez egy páros gráf, mert ha  $i + j$  és 74 relatív prímekek, akkor  $i + j$  páratlan. Tehát minden él egy párost és egy páratlant köt össze. Ezért a Gallain kívül a Königet is alkalmazhatjuk. Minden  $1 \leq i \leq 37$ -re  $v_i$  és  $v_{75-i}$  szomszédosak, hiszen 75 és 74 relatív prímekek. Ezek az élek pedig egy teljes párosítást alkotnak. Ezért  $\nu(G) = 37$ . Ennek alapján a König és Gallai tételekből azt kapjuk, hogy mind a négy paraméter 37.

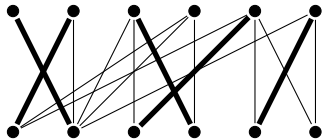
4. Legyen  $G$  egy  $2n$  pontú gráf, mely egy  $2n - 1$  pontú  $L$  útból és egy  $c$  pontból áll, ami  $L$  minden pontjával össze van kötve. Mennyi  $\tau(G)$ ?

*Megoldás:* A gráfnak  $2n$  pontja van és van Hamilton köre, tehát van  $n$  független éle (vagyis teljes párosítása). Tehát  $\nu = n$ , ezért  $\tau \geq n$ . Viszont  $n$  ponttal le is lehet fogni az éleket, vegyük minden második pontot a Hamilton körön, de úgy, hogy a  $c$  pont is köztük legyen. Tehát  $\tau = n$ .

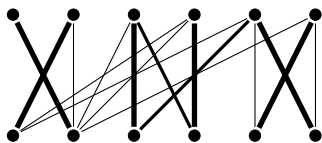
5. Lássuk be, hogy egy  $n$  pontú egyszerű  $G$  gráfban  $\tau(G) = n - 1$  akkor és csak akkor, ha  $G = K_n$ .

*Megoldás:* Az világos, hogy  $\tau(K_n) = n - 1$ : ennyi pont lefogja az összes élt,  $n - 2$  pontot választva viszont lesz nem lefogott él, a kimaradó két pont között. Tegyük fel, hogy  $G \neq K_n$ . Ekkor van két nem szomszédos csúcsa, mondjuk  $x$  és  $y$ . Viszont ekkor a többi  $n - 2$  csúcs lefogja az összes élt, tehát  $\tau \leq n - 2$ , semmiképpen sem  $n - 1$ .

6. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



*Megoldás:* Ha elkészítjük a szokásos hálózatot, akkor az adott folyamhoz kell javító utat keresni. Vagy: az egyetlen alsó fedetlen pontból kell alternáló utat keresni az egyetlen felsőbe. Majd ezen kicserélni a párosítás-éleket a nem-párosítás élekre.



7. Jelölje  $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát,  $\tau(G)$  pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy  $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$ .

*Megoldás:* Egy csúccsal legfeljebb  $\Delta(G)$  élt tudunk lefogni.

8. Jelölje  $\omega(G)$  a  $G$  gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz  $G$  komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy  $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$ .

*Megoldás:* Egy klikk és egy független ponthalmaz legfeljebb egy pontban metszheti egymást.

9. Egy 100 csúcsú egyszerű  $G$  gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben van teljes párosítás.

*Megoldás:* 1. Belátjuk a Tutte feltételt: ha elhagyunk  $k$  pontot, akkor max  $k$  páratlan méretű komponenset kapunk. Először legyen  $k \geq 2$ , hagyjunk el  $k$  pontot. Ha a maradékban legalább 3 komponens lenne, akkor választhatnánk 3 komponensből egy-egy pontot, amelyek között egyáltalán nincs él, ami lehetetlen. Legyen  $k = 1$ , hagyjunk el 1 pontot. Marad 99 pont. Az előbbieket alapján legfeljebb 2 komponensünk van, de ezek közül pontosan 1 páratlan méretű, úgyhogy készen vagyunk.

2. Minden pont foka legalább 98, mert ha lenne 2 nem-szomszédja, akkor a pont és a két nem-szomszéd megsértenék a feltételt. De akkor a Dirac tétel alapján van a gráfban Hamilton kör, ennek minden második éle teljes párosítást alkot.

### Házi feladat

1. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű  $G$  gráfnak  $X$  egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek  $x, y$  és  $z$  különböző  $X$ -beli csúcsok. Tartalmazhat-e a  $G + xy + yz + zx$  gráf teljes párosítást?
2. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve akkor és csak akkor, ha  $|i - j| < 7$ . Határozzuk meg  $\kappa(G)$ -t,  $G$  pontösszefüggőségi számát.
3. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve akkor és csak akkor, ha  $|i - j| = 1, 3$ , vagy  $5$ . Határozzuk meg az  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  értékeket.