# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2020. március 30-április 3.

*Páros gráfok, párosítások, Hall, Frobenius, Kőnig tételek.*

**Tudnivalók**

$G(A, B, E)$ páros gráf, ha $A$ és $B$ a csúcsok halmaza, $E$ az élek halmaza, és minden él $A$ és $B$ között fut. Legyen $G$ egy tetszőleges gráf.

Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Egy $e_1, e_2, \dots, e_k$ élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk.

Egy ponthalmaz **lefogó**, ha $G$ minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$: független élek maximális száma;

Minden $G$ gráfra igaz, hogy $\nu(G) \leq \tau(G)$. (Mert a $\nu$ darab független él lefogásához is kell már $\nu$ darab pont.)

Tetszőleges $X$ csúcshalmazra legyen $N(X)$ $X$ szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy $X$−beli csúccsal össze vannak kötve.

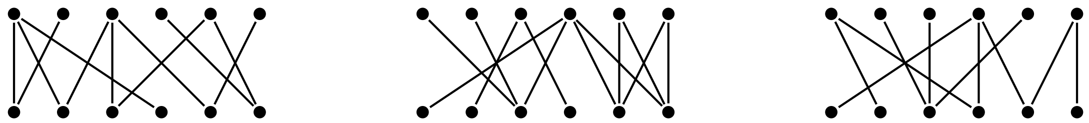
Legyen most $G = G(A, B, E)$ páros gráf, vagyis $A$ és $B$ a csúcsok halmaza, $E$ az élek halmaza, és minden él $A$ és $B$ között fut.

**Frobenius tétel:** Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

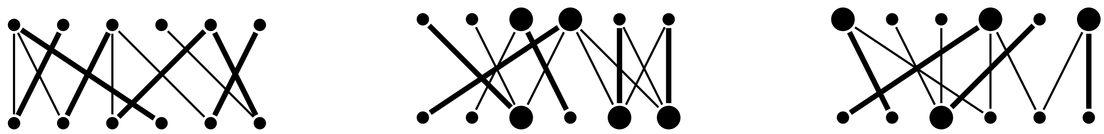
**Hall tétel:** Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban $A$–t lefedő párosítás, ha minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

**König tétel:** (a) Ha $G$ páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



*Megoldás:*



1: $\nu = 6$. Az ábra mutat 6 független élt, tehát $\nu \geq 6$. De több nem lehet, mert ez egy teljes párosítás. 2: Az ábrán látható 5 független él (tehát $\nu \geq 5$ és 5 lefogó pont (tehát $\tau \leq 5$). Mivel minden gráfban $\nu \leq \tau$, összerakva $5 \leq \nu \leq \tau \leq 5$ tehát $\nu = 5$. 3: Hasonló, az ábrán látható 4 független él és 4 lefogó pont, tehát $\nu = 4$.

Általános recept: ha kevés lefogó pontot keresünk, akkor az 1-fokú pontokra csatlakozó éleket a másik végponttal érdemes lefogni. Ha pedig sok független élt keresünk, akkor érdemes először az 1-fokú pontokra csatlakozó éleket választani.

2. Adott $n$ fiú és $n$ lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.

*Megoldás:* Tekintsük a fiú-lány nem-rokon páros gráfot. Tehát az egyik osztály a fiúk ($A$), a másik a lányok ($B$), egy fiút és egy lányt összekötünk, ha nem rokonok. Ebben a gráfban szeretnénk talalni egy teljes párosítást. A feltételek alapján minden fiú fokszáma legalább $n - 1$ és minden lány fokszáma legalább 1. Ellenőrizzük a Frobenius feltételeket. $|A| = |B| = n$ rendben. Innen két lehetőségünk van, nézhetjük $A$ illetve $B$ felől.

1. Legyen $X \subseteq A$. Ha $|X| = n$, vagyis $X = A$, akkor $N(X) = B$, hiszen minden lány fokszáma legalább 1. Tehát $|X| = |N(X)| = n$. Ha $|X| < n$, akkor, mivel minden fiú fokszáma legalább $n - 1$, $|N(X)| \geq n - 1$, tehát $|X| \leq |N(X)| = n$. Tehát minden $X \subseteq A$-ra $|X| \leq |N(X)|$, a Frobenius miatt van teljes párosítás.

2. Legyen $X \subseteq B$. Ha $|X| \geq 2$, akkor $N(X) = A$, hiszen minden fiú fokszáma legalább $n-1$, minden fiú össze van kötve $X$ valamelyik pontjával. Tehát $|X| \leq |N(X)| = n$. Ha $|X| = 1$, akkor, mivel minden lány fokszáma legalább 1, $|N(X)| \geq 1$, tehát $1 = |X| \leq |N(X)|$ és megint kész vagyunk.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G$ páros gráf összefüggő és az $A$ osztályában a fokszámok különbözők, akkor $G$-nek van $A$-t fedő párosítása.

   *Megoldás:* Mivel $G$ összefüggő, minden csúcs foka legalább 1. Legyen $X \subseteq A$, $|X| = k$. Mivel minden fok különböző, $X$ csúcsai közül a legnagyobb fokú foka legalább $k$. Vagyis $|N(X)| \geq k$. Tehát $k = |X| \leq |N(X)|$, a Hall tétel alapján van $A$-t fedő párosítás.

4. Egy kiránduláson $n$ házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden részvevő legalább $n$ fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

   *Megoldás:* Legyen a páros gráfban az egyik osztály ($A$) a $2n$ darab csoki. A másik osztály ($B$) pedig a $2n$ darab ember. Ellenőrizzük a Frobenius feltételt. Nyilván $|A| = |B| = 2n$. Legyen $X \subseteq B$. Ha $X$ tartalmazza egy házaspár mindkét tagját, akkor a feltétel szerint $N(X) = A$, tehát $|N(X)| = 2n$, ennek alapján $|X| \leq |N(X)| = 2n$. Ha $X$ minden házaspárból max 1 embert tartalmaz, akkor $|X| \leq n$, viszont a felétel szerint $|N(X)| \geq n$, tehát $|X| \leq |N(X)|$ és már készen is vagyunk!

5. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.

   *Megoldás:* Legyen a két osztály szokás szerint $A$ és $B$, minden fokszám $r$. Igazoljuk a Frobenius feltételeket. Az élek száma, $|E| = r|A|$, hiszen minden $A$-beli csúcsból $r$ él megy ki és íminden élt pontosan egyszer számoltunk. Ugyanígy $|E| = r|B|$, és ebből $|A| = |B|$. Most legyen $X \subseteq A$, $N(X)$ a szomszédok halmaza, és legyen $E_X$ az $X$ és $N(X)$ közti élek halmaza. Ekkor, mivel minden $X$-beli pont foka $r$, $|E_X| = r|X|$. Minden $N(X)$-beli pont foka is $r$. Az $E_X$-beli élek mindegyikének az egyik végpontja $N(X)$-ben van, ugyanakkor $N(X)$-ből kimehet olyan él is, ami nem tartozik $E_X$-hez. Tehát $|E_X| \leq r|N(X)|$. Az előzővel együtt: $|X| \leq |N(X)|$. Tehát teljesül a Fromebius tétel feltétele, van teljes párosítás.

6. A $G$ irányított gráf minden csúcsából $k$ él indul és $k$ él érkezik. Igaz-e, hogy $G$-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek $G$ minden csúcsán áthaladnak?

   *Megoldás:* Képezzük a $G'$ irányítatlan páros gráfot. Minden $v$ csúcsot helyettesítsünk egy $v_{\mathrm{ki}}$ és egy $v_{\mathrm{be}}$ csúccsal. Ha volt egy $uv$ él $G$-ben, akkor húzzuk be az $u_{\mathrm{ki}}v_{\mathrm{be}}$ élt. Az íkapott $G'$ nyilván páros gráf, egyik osztálya a $v_{\mathrm{ki}}$, másik osztálya a $v_{\mathrm{be}}$ csúcsokból áll. Ráadásul minden csúcs foka éppen $k$. Az előző feladatból tudjuk, hogy a reguláris páros gráfoknak van teljes párosítása. Vegyük a teljes párosításnak megfelelő éleket $G$-ben. Minden csúcsnak a kifoka és a befoka is 1. Tehát ezek az élek pontdiszjunkt irányított köröket alkotnak, amelyek $G$ minden csúcsán áthaladnak.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.

   *Megoldás:* A gráf minden összefüggő komponense egy páros hosszú kör. Minden ilyen komponensben pontosan két teljes parosítas van. Tehát ha $k$ komponens van, akkor összesen $2^k$ teljes parositas van.

8. a. Bizonyítsuk be, hogy minden véges $G$ gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G) \geq \nu(G)$ teljesül. b. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $2\nu \geq \tau \geq \nu$ számokhoz van olyan $G$ gráf, amelyre $\nu(G) = \nu$ és $\tau(G) = \tau$.

   *Megoldás:* a. $G$-ben van $\nu$ darab független él, már ezek lefogásához is kell $\nu$ darab pont, tehát $\nu \leq \tau$. Ugyanakkor ha veszünk $\nu$ darab független élt, az egy maximális független élhalmaz, tehát minden további élnek van közös végpontja ezen $\nu$ él valamelyikével. Vagyis a $\nu$ él $2\nu$ végpontja lefogja az összes élt. Tehát $2\nu \geq \tau$.

   b. Ha $G$ egy 2 pontú, 1 élű gráf, akkor $\nu = \tau = 1$. Ha $G$ egy háromszög, akkor $\nu = 1$, $\tau = 2$. Ennek alapján már könnyű: vegyük $2\nu - \tau$ darab él és $\tau - \nu$ darab háromszög diszjunkt unióját.

9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

   *Megoldás:* Tekintsük a fiú-lány ismerősség páros gráfot. Tehát az egyik osztály a fiúk ($A$), a másik a lányok ($B$), egy fiút és egy lányt összekötünk, ha ismerik egymást. Ebben a gráfban szeretnénk talalni egy teljes párosítást.

A feltételek alapján minden pont foka legalább 13. Ellenőrizzük a Frobenius feltételeket. $|A| = |B| = 25$ rendben.

Legyen $X \subseteq A$. Mivel minden fiú fokszáma legalább 13, $|N(X)| \geq 13$, tehát ha Ha $|X| \leq 13$, akkor $|X| \leq |N(X)|$. Ha pedig $|X| > 13$, akkor $N(X) = B$, hiszen minden lány fokszáma legalább 13, tehát lehetetlen, hogy az $X$-be tartozzó fiúk közül egyet sem ismer. Ezért $|X| \leq |N(X)| = 25$. Tehát minden $X \subseteq A$-ra $|X| \leq |N(X)|$, a Frobenius miatt van teljes párosítás.

10. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan $k$ db különböző teljes párosítása van.

    *Megoldás:* Egy páratlan, legalább $k$ hosszú kör, amelynek $k$ pontja össze van kotve egy plusz ponttal.

11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges $G$ gráf mindazon élei, amik $G$ valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

    *Megoldás:* Persze, hogy nem. Egy páros sok csúcsú teljes gráf minden éle szerepel teljes párosításában, de messze nem páros gráf.

12. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab $A$). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $J$, $Q$, $K$, $A$. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)

    *Megoldás:* Definiálunk egy páros gráfot. $A$: a paklik. $B$: a figurák. Nyilván $|A| = |B| = 13$. Kössünk össze minden paklit (illetve a megfelelő csúcsot) a benne levő figurákkal. Ha ugyanabból a figurából több van benne, használjunk többszörös éleket. Ez egy reguláris páros gráf lesz, minden pont foka 4. Korábban láttuk, hogy reguláris *egyszerű* páros grafban van teljes párosítás. A bizonyítás változtatás nélkül működik abban az esetben is, ha megengedünk párhuzamos éleket. Ennek alapján tehát van teljes párosítás. Ezután minden pakliból a párosításban vele szomszédos figurát vesszük ki.

13. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan $k$ darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható $n$ darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

    *Megoldás:* Breaking news! Definiálunk egy páros gráfot!! $A$: sorok. $B$: oszlopok. Él: akkor és csak akkor, ha a megfelelő sor megfelelő oszlopában van 1-es. Nyilván $|A| = |B| = n$ és minden pont foka $k$, tehát van teljes párosítás. Az ezeknek megfelelő $n$ darab 1-es pont jó.

### Házi feladat

1. Legyen $G(A, B, E)$ páros gráf. Tudjuk, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq |A| - 1$, vagyis $G$ tartalmaz $|A| - 1$ független élt.

2. Legyen $G$ egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)

3. Legyenek $G$ csúcsai $v_1, \ldots, v_{12}$, $v_i$ és $v_j$ $(i \neq j)$ akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $ij$ osztható 6-tel. Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét (és bizonyítsuk be, hogy annyi).