

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2020. március 23-27.

*Magasabb összefüggőség, Menger*

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű  $G$  gráfra, amire  $\lambda(G) \neq \kappa(G)$ . Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Tetszőleges  $1 < \kappa < \lambda$  pozitív egészekre konstruáljunk  $G$  gráfot, amire  $\lambda(G) = \lambda$  és  $\kappa(G) = \kappa$ .
3. Határozzuk meg a  $K_n$  teljes gráf  $\lambda(K_n)$  ill.  $\kappa(K_n)$  élösszefüggőségi ill. pontösszefüggőségi számát. Ugyanez a kérdés a  $K_{n,n}$  teljes páros gráfra.
4. Legyen  $G$  az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy  $\kappa(G) = 3$ .
5. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $n$  csúcsú  $k$ -összefüggő gráfnak legalább  $kn/2$  éle van!
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $r$ -reguláris ( $r > 1$ ) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő!
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $G$  véges gráf esetén  $\delta(G) \geq \lambda(G) \geq \kappa(G)$  teljesül. ( $\delta(G)$   $G$ -ben a legkisebb fokszám.)
9. Mutassuk meg, hogy a  $G$  egyszerű gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha bármely két csúcsára található olyan kör  $G$ -ben, amely ezen csúcsokat tartalmazza. Igazoljuk, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó, egyszerű  $G$  gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha  $G$  bármely két élén keresztül vezet  $G$ -nek köre.
10. Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf  $k$ -összefüggő. Vegyünk fel egy új  $x$  pontot, és kössük össze  $G$   $k$  különböző pontjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott  $G'$  gráf is  $k$ -összefüggő!
11. Igazoljuk Dirac tételét: ha  $\kappa(G) \geq k \geq 2$ , akkor  $G$  bármely  $k$  pontjához található  $G$ -nek olyan köre, amely mind a  $k$  pontot tartalmazza.
12. Mutassuk meg, hogy a 2-összefüggő ill. 2-élösszefüggő gráfoknak van fülfelbontása. Azaz, a 2-őf gráfok pontosan azok, amelyek felépíthetők egyetlen csúcsból fülek egymás utáni hozzáadásával. Itt minden fül a már felépített félkész gráf két különböző csúcsa közti olyan út, amelynek belső csúcsai nem szerepelnek az eddig felépített gráfban. A 2-élőf gráfok fülfelbontására hasonló igaz, megengedve, hogy egy fülnek a két vége ugyanaz a csúcs legyen. (Írányított gráfokra hogyan terjeszthetők ki ezek az állítások?)
13. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $G$  véges, irányítatlan gráfnak pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása (azaz olyan, amelyre bármely két csúcs között mindkét irányba van irányított út), ha  $G$  kétszeresen élösszefüggő.
14. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  irányított gráfban van  $u$ -ból  $v$ -be is és  $v$ -ből  $w$ -be is  $k$  éldiszjunkt irányított út akkor  $G$ -ben létezik  $u$ -ból  $w$ -be is  $k$  éldiszjunkt irányított út.
15. Legyenek  $A, B, C$  páronként diszjunkt,  $r$ -elemű halmazok, és  $V(G) = A \cup B \cup C$  a  $G$  gráf csúcshalmaza, valamint legyen  $uv \in E(G)$ , ha  $u$  és  $v$  nem ugyanabból az  $r$ -elemű halmazból valók. Mekkora  $\kappa(G)$ ?
16. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.
17. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
18. Igazoljuk, hogy ha a  $G$  gráf 2019-pontú és 32-összefüggő, akkor  $G$  bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 64 élű út.
19. Igazoljuk, hogy ha egy  $n$  pontú egyszerű  $G$  gráfban minden fokszám legalább  $(n + k - 2)/2$ , akkor  $G$   $k$ -őf!

## Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy ha az azonos pontthalmazon megadott  $G_1$  és  $G_2$  gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor  $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$ . Igaz-e, hogy ekkor  $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$  is teljesül? ( $G_1 + G_2$  azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)

2. Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf a rögzített  $x$  és  $y$  pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az  $x$  és  $y$  pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, ill. 7?