Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2020. március 6.

Minimális súlyú feszítőfa, Euler-kör, Euler-út, Hamilton-kör, Hamilton-út

1. Bizonyítsuk be, hogy egy fában *az összes* leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*)
2. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.
3. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)
4. Adjunk meg tetszőleges k-hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.
5. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
6. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
7. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
8. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
9. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.
10. Ha egy súlyozott élű gráfban vannak egyforma súlyú élek, akkor elképzelhető, hogy a mohó algoritmus többféleképpen is lefuthat. Bizonyítsuk be, hogy *minden* minimális összsúlyú feszítőfa megkapható a mohó algoritmus megfelelő futtatásával.
11. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)
12. Igazoljuk, hogy ha a G gráf minden fokszáma páros, akkor $E(G)$ előáll éldiszjunkt körök uniójaként.
13. Igazoljuk, hogy ha G összefüggő és minden fokszáma páros, akkor G-ből elhagyhatók G egy körének élei úgy, hogy a kapott gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő maradjon.
14. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha minden pont be–foka egyenlő a ki–fokával, és gráf, mint irányítatlan gráf, összefüggő.
15. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler köre?
16. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.
17. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler kört, illetve Euler utat?
18. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$-nek is van Euler köre!

    (A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)
19. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?

20. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.

21. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G-ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G-ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?

22. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

23. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
(a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
(b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
(c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
(d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.

24. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?

25. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.

26. (a) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfból bárhogy elhagyunk k csúcsot, legfeljebb k komponensre esik szét! (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfnak nincs Hamilton köre!

27. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.

28. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.

29. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

30. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!

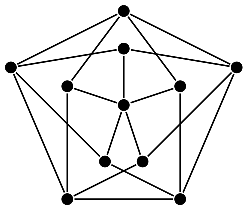
31. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?

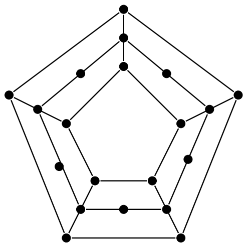
32. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?

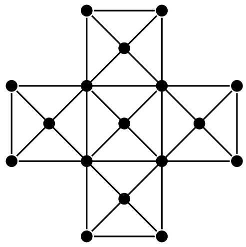
33. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

34. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
(a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
(b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
(c) G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$.

35. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?







36. Legalább hány éle van egy olyan hat (n) pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
37. Legfeljebb hány éle lehet egy hat (n) csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?
38. Legyen G egy n csúcsú gráf. Ha találunk két nem szomszédos u, v csúcsot, amelyekre $d(u) + d(v) \geq n$, akkor húzzuk be az uv élet. Ismételjük az eljárást, amíg el nem akadunk.

    Előfordulhat, hogy ezt az eljárást többféleképpen is végrehajthatjuk, mert egy lépésben több lehetséges él közül is választhatunk. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is hajtjuk végre az eljárást, az eredményként kapott gráf mindig ugyanaz. (Ezt nevezzük G lezártjának.)

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris feszítő részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris feszítő részgráfja?

   (Egy gráfot *k-regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k. Egy részgráfot *feszítő részgráfnak* nevezünk, ha az eredeti gráf összes pontját tartalmazza.)

2. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.