Kombinatorika és gráfelmélet 1.

3. gyakorlat, 2020. február 28.

Minimális súlyú feszítőfa, Kruskal tétel, mohó algoritmus

Tudnivalók:

Adott egy G összefüggő gráf, minden e élen egy $s(s) > 0$ súllyal. Meg szeretnénk keresni G minimális összsúlyú feszítőfáját.

Feltehetjük, hogy G a teljes gráf. Ha nem az lenne, adjuk hozzá a hiányzó éleket végtelen (vagy nagyon nagy) súllyal, a megoldás nem változik.

Mohó algoritmus: rakjuk sorba az éleket súly szerint növekvő sorrendbe. Menjünk sorba az éleken, ebben a sorrendben, egy adott élt akkor veszünk be az épülő fába, ha az eddig bevett élekkel nem alkot kört.

Kruskal tétel: a mohó algoritmus eredménye egy minimális összsúlyú feszítőfa.

Az előző feladatsoron is szereplő feladatokat kivettem.

1. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.

   Megoldás: Legyen V az a város, ahonnan a legtöbb városba megy repülő, ez jó lesz. Tegyük fel, hogy az U városba nem megy V-ből repülő. Ha valamelyik városból, ahova megy V-ből repülő, megy U-ba repülő, akkor V-ből U-ba el lehet jutni egy átszállással. Ha nem, akkor viszont az összes ilyen városba jár repülő U-ból, és még V-be is, ami ellentmond V választásának.

2. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)

   Megoldás: Húzzuk össze a kis fákat egy-egy csúccsá. Így egy eredeti fából egy r csésú fát kapunk, ilyen r^{r-2} féle van. De ennek a fának minden éle k^2 különböző eredeti élből származhatott. Ezért a válasz $r^{r-2}(k^2)^{r-1}$.

3. Adjunk meg tetszőleges k-hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.

   Megoldás: Nagyon sok lehetőség van, például veszünk egy $2k+2$ hosszú utat, és az i-edik $(2 \le i \le k+1)$ csúcsára illesztünk még egy levelet.

4. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)

   Megoldás: Ha a gráf nem összefüggő, akkor egyáltalán nincs benne feszítőfa. Ha összefüggő, akkor pontosan egy kör van benne. Ha a 2 súlyú él benne van a körben, akkor a minimális feszítőfa egyértelmű: ki kell hagyni a 2 súlyú élt. Ha nincs benne, akkor a kör bármelyik élet kihagyhatjuk, tehát annyi van, amellyi a kör hossza. Ez 3 és 1999 között bármi lehet, tehát a válasz: $k = 1, 3, 4, \ldots 1999$.

5. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.

   Megoldás: A minimális feszitőfában van pontosan egy él, ami az n-be megy. Egy legalább van, és ha mondjuk in és jn is bent lenne, akkor vegyuk be az ij élt valamelyik helyett, csökken a súly. Hasonloan, tetőleges i-ből is pontosan egy el meg a kisebbek fele. Kettő az elozőek alapján nem mehet, ha egy se menne, akkor húzzunk be egyet, ez kört alkot egy nagyobbak felé menő éllel, ezt töröljük. Viszont minden ilyen jó is: mindegyik feszítőfa és mindegyiknek a súlya $2+3+\ldots+n$. Ilyen fából pedig pontosan $2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$ van.

6. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.

Megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan U, V felbontás, amelyek között $e = uv$ az egyedüli legkisebb súlyú él. Legyen F egy minimális súlyú feszítőfa, amiben nincs benne e. $F + e$-ben van egy kör, aminek van e-től különböző f éle U és V között. A feltétel szerint ennek nagyobb a súlya, mint e-nek. $F - f + e$ is feszítőfa és a súlya kisebb, mint F súlya, ami ellentmondás. Most tegyük fel, hogy e minden minimális feszítőfának éle. Legyen F egy minimális feszítőfa, hagyjuk el belőle e-t. A két komponens csúcshalmaza legyen U és V. Ha futna köztük olyan él, aminek a súlya kisebb, mint e súlya, akkor erre kicserélve e-t, kisebb feszítőfát kapnánk, ami lehetetlen. Ha lenne olyan él U és V között, aminek ugyanannyi a súlya, mint e-nek, akkor erre kicserélve e-t, egy minimális feszítőfát kapnánk, amiben nincs benne e, ez is lehetetlen. Tehát u és V között e az egyedüli legkisebb súlyú él.

7. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.

   Megoldás: Tegyük fel, hogy F_1 és F_2 minimális súlyú feszítőfák és legalább két élben eltérnek, $e_1, e_2 \in F_1$, $e_1, e_2 \notin F_2$. Az $F_2 + e_1$ gráf tartalmaz kört, ennek van egy $e_3 \neq e_1$ éle $F_1 - e_1$ ket komponense között. Mivel se $F_1 - e_1 + e_3$, se $F_2 - e_3 + e_1$ nem kisebb súlyú, mint F_1 illetve F_2, e_1 és e_3 súlya ugyanannyi. De akkor $F_1 - e_1 + e_3$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa, amely különbözik F_1-től is (nincs benne e_1) és F_2-től is (benne van e_2), ellentmondás.

8. Ha egy súlyozott élű gráfban vannak egyforma súlyú élek, akkor elképzelhető, hogy a mohó algoritmus többféleképpen is lefuthat. Bizonyítsuk be, hogy *minden* minimális összsúlyú feszítőfa megkapható a mohó algoritmus megfelelő futtatásával.

   Megoldás: Legyen F a kedvenc minimális összsúlyú feszítőfa. Növeljük meg minden F-en kívüli él súlyát egy nagyon kicsit $\varepsilon > 0$ számmal. Ebben az új súlyozásban F az egyetlen minimális összsúlyú feszítőfa. A mohó algoritmus meg is találja, a Kruskal tétel alapján. De ahogy fut itt a mohó algoritmus, az az eredeti súlyozásra is egy legális futás.

Házi feladat

1. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.

2. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?

   Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?