

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

2. gyakorlat, 2020. február 21.

Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Prüfer-kód

Tudnivalók:

Gráf, izomorfia, rászgráf definíciója.

Egy G gráf csúcsai v_1, \dots, v_n , fokszámok: d_1, \dots, d_n . Ekkor $\sum_{i=1}^n d_i = 2e$, ahol e az élek száma.

Élsorozat: $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m}$, ahol minden j -re $v_{i_j} v_{i_{j+1}}$ G éle. Séta: élsorozat, amiben minden él max egyszer szerepelhet. Út: élsorozat, amiben minden csúcs max egyszer szerepelhet.

Zárt élsorozat: $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m}$ élsorozat, ahol $v_{i_1} = v_{i_m}$. Körséta: séta, amelyben $v_{i_1} = v_{i_m}$. Kör: út, amelyben $v_{i_1} = v_{i_m}$.

G összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út \Leftrightarrow bármely két csúcsa között vezet séta \Leftrightarrow bármely két csúcsa között vezet élsorozat. (pl legrövidebb ilyen élsorozat egy út)

G összefüggő és van benne kör: elhagyható egy él úgy, hogy összefüggő marad. G körmentes és nem összefüggő: hozzávehető egy él úgy, hogy körmentes marad.

Fa: olyan gráf, ami összefüggő és körmentes.

Minden összefüggő gráf tartalmaz fát. Minden körmentes gráf kibővíthető fává. Minden fában van legalább két levél (1-fokú csúcs). Minden n csúcsú fának $n - 1$ éle van.

Fa: összefüggő és körmentes \Leftrightarrow összefüggő és $n - 1$ éle van \Leftrightarrow körmentes és $n - 1$ éle van.

Cayley tétel: n számozott ponton n^{n-2} különböző fa van. Bizonyítás: Legyenek a csúcsok $1, 2, \dots, n$. Fa $\Leftrightarrow n - 2$ hosszú kód, minden eleme $1, \dots, n$ (Prüfer kód).

Fa \Rightarrow Prüfer kód: w_1 : legkisebb sorszámú levél, elhagyjuk, szomszédját felírjuk: v_1 , ezt ismétljük: $v_1 v_2 \dots v_{n-1}$, ez a kibővített Prüfer kód. v_{n-1} mindig n . Ezt elhagyva: $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$, a Prüfer kód.

Megfigyelés: Prüfer kódban v_i $d(v_i) - 1$ -szer szerepel. Speciálisan v_i levél akkor és csak akkor, ha nem szerepel.

Prüfer kód \Rightarrow fa: $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$ Prüfer kód, legyen $v_{n-1} = n$, kibővített Prüfer kód: $v_1 v_2 \dots v_{n-2} n$. Megkeressük az elhagyott csúcsokat, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} -et. Amikor v_i -t felírtuk, w_i -t hagytuk el. Rekurzívan, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ -re: w_i a legkisebb index, ami nem szerepel a $w_1 w_2 \dots w_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_{n-1}$ -ben. A kapott gráf élei: $v_i w_i$, $i = 1, \dots, n - 1$. Ez egy fa lesz, aminek $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$ a Prüfer kódja.

1. Rajzoljunk olyan egyszerű gráfokat, amiknek rendre 6, 7, 8, 9 csúcsa van és minden csúcs foka 3.

Megoldás: 6: hat hosszú kör, három átlóval. 8: nyolc hosszú kör, négy átlóval. 7, 9: nincs ilyen, mert a fokok összege páratlan.

2. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre $v = 4, e = 5$, ill. $v = 5, e = 3$, ill. $v = 5, e = 7$, ill. $v = 5, e = 8$, teljesül, ahol v jelöli a pontok számát, e pedig az élek számát!

Megoldás: $v = 4, e = 5$: ez egy teljes gráf minusz egy él. Egy (féle) ilyen van. $v = 5, e = 3$: végig kell nézni az eseteket, legyenek a csúcsok $1, 2, \dots, 5$, három megoldás van. 1: 12, 13, 14, 2: 12, 23, 34, 3: 12, 23, 45. $v = 5, e = 7$: Ugyanaz, mint az előző, a komplementere 3 élű. $v = 5, e = 8$: Nezzük inkább a komplementert, ami két élű. Két megoldás: 12, 23 és 12, 34.

3. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző (páronként nem izomorf) egyszerű gráf létezik?

Megoldás: Mivel $\binom{50}{2} = 1225$, ezért ez egy teljes gráf, minusz két él. Vagyis két lehetőség van, a két hiányzó élnek van közös csúcsa, illetve nincs.

4. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre 1, 2, 2, 3, 3, 3 ill. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ill. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ill. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

Megoldás: 1, 2, 2, 3, 3, 3: Ilyen van, pl ha a csúcsok az 1, 2, 3, 4, 5, 6, akkor az élek: 12, 13, 34, 42, 45, 35, 56. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4: mivel a fokszámösszeg páratlan, nincs ilyen. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7: ez egy 7 csúcsú gráf lenne, de akkor nem lehet egy csúcs foka 7, tehát nincs ilyen. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6: Mivel 7 csúcs van és két 6-fokú van, nem lehet 1-fokú. Tehát nincs ilyen.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha G tetszőleges egyszerű gráf, akkor a G vagy \bar{G} gráfok valamelyike összefüggő!

Megoldás: Ha G nem összefüggő, akkor legalább két összefüggő komponense van. Ekkor viszont a komponensek közti összes él benne van G -ben. Ekkor viszont \bar{G} összefüggő, ha u és v különböző komponensben vannak, akkor össze vannak kötve, ha ugyanabban a komponensben, akkor meg egy másik komponens tetszőleges csúcsán keresztül el lehet jutni u -ból v -be.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $(n-3)$ -mal egyenlő!

Megoldás: Tegyük fel, hogy pontosan $n-3$ másodfokú pont van. Ezenkívül van két levél. Már csak egy csúcs, x foka kérdéses. Egy fában a fokszámok összege $2n-2$, itt az x -en kívüli fokok összege $2n-6+2=2n-4$, tehát x foka is 2, ellentmondás!

7. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?

Megoldás: $2^{\binom{n}{2}}$

8. Igazoljuk, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.

Megoldás: Mivel a fokszámösszeg páros, az első állítás nyilvánvaló. Második: Egyik irányban végtelen út. Legyenek a csúcsok a pozitív egészek, minden i -t kössünk $i+1$ -gyel. 1 foka 1, minden más csúcsé 2.

9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?

Megoldás: Valamivel kösszebb a komplementer gráfokat vizsgálni (megtehetjük, mert két gráf akkor és csak akkor izomorf, ha a komplementereik). Itt a fokszámok: 3, 3, 2, 2, 2, 2. Ha végigbütyköljük, 4 lehetőség van. Legyenek a csúcsok 1, 2, 3, 4, 5, 6. A négy lehetőség élei: 1: 12, 13, 34, 42, 15, 56, 62. 2: 12, 13, 34, 45, 52, 16, 62. 3: 13, 32, 14, 42, 15, 56, 62. 4: 12, 14, 43, 31, 25, 56, 62.

10. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatóak úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.

Megoldás: Sorszámazzuk meg tetszőlegesen a csúcsokat és minden élt irányítsunk a nagyobb sorszámú vége felé.

11. Igazoljuk a következő állítást. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2 -nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.

Megoldás: Ha $e_1 \in T_2$, akkor nem túl nehéz, legyen $e_2 = e_1$. A kicseréléssel nem csináltunk semmit, vagyis $T_1 - e_1 + e_2 = T_1$, $T_2 - e_2 + e_1 = T_2$. Tehát tegyük fel, hogy $e_1 \notin T_2$. Ekkor $T_2 + e_1$ -ben van egy C kör. Ennek tetszőleges e' élét elhagyva, $T_2 + e_1 - e'$ ismét fa. Tekintsük a $T_1 - e_1$ gráfot, ennek két komponense van, K_1 és K_2 . Ezek között fut $e_1 \in C$, tehát, van C_n -nek (legalább) egy másik éle, e_2 , ami K_1 és K_2 között fut. Na, ezt cseréljük ki e_1 -gyel! Ekkor $T_1 - e_1 + e_2$ hiszen újra összekötöttük a K_1 és K_2 komponenseket, és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa, hiszem megszüntettük a C kört.

12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?

Megoldás: Ha minden pont harmadfokú, akkor (mivel a fokszámok összege páros) a gráfnak páros sok csúcsa van. Ha 4 csúcsa van, akkor a K_4 teljes gráfot kapjuk, de abban van 3 hosszú kör, nem jó. 6 csúcs viszont elég, például a $K_{3,3}$ teljes páros gráf.

13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!

Megoldás: 5 csúcsra: C_5 , 5 hosszú kör. 6 csúcsú nincs, mert a teljes 6 csúcsú gráfnak $\binom{6}{2} = 15$ éle van, ami páratlan.

14. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\bar{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?

Megoldás: $\binom{n}{2} - (n-1) = 15(n-1)$, ebből $n = 1$ vagy $n = 60$.

15. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másiktól egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.

Megoldás: 2 db hurokél, 0000 1111, 3 db 4 hosszú kör, 0001 – 0010 – 0100 – 1000, 0011 – 0110 – 1100 – 1001, 0111 – 1110 – 1101 – 1011, és két párhuzamos él 0101 és 1010 között.

16. Igazoljuk, hogy ha egy $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)

Megoldás: Vegyük a k legnagyobb fokú csúcsot. Belőlük összesen $\sum_{i=1}^k d_i$ él indul (most minden élt mindkét vége felől számolunk). Ezek közül $k(k-1)$ lehet belső él, a többi a többi csúcsba érkezik. De egy külső, d_i fokú csúcs legfeljebb $\min(d_i, k)$ élt tud fogadni.

17. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.

Megoldás: A fokszámok $0, 1, \dots, n-1$ lehetnek, de nem lehet egyszerre 0 és $n-1$ fokú csúcs, ezért csak $n-1$ -féle fokszám lehet egy véges egyszerű gráfban.

18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges G gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$, ahol $c(G)$ a G gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.

Megoldás: Legyen a komponensek csúcsainak a száma n_1, \dots, n_c . Az i -edik komponensnek legalább $n_i - 1$ -ele van, hiszen összefüggő. Tehát összesen legalább $\sum_{i=1}^c (n_i - 1) = |V(G)| - c(G)$ él van.

19. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)

Megoldás: Utak és körök uniója.

20. Egy 3×3 méretű sakktábla négy sarkába két világos és két sötét huszárt állítunk úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes sarokban álljanak. Elérhető-e ebből az állapotból a szokásos lépéseket végezve, hogy a tábla négy sarkában álljanak a huszárok, de az átellenesek különböző színűek legyenek? (Közben sosem állhat egy mezőn egynél több figura.)

Megoldás: Nem. Készítsük el a lólépés gráfot, aminek a csúcsai a mezőknek felelnek meg, két mező pedig pontosan akkor van összekötve, ha lólépésre vannak. Ebben a középső mezőnek megfelelő csúcs izolált pont, a többi egy 8 hosszú kört alkot. Ezen felváltva vannak a fehér és fekete lovak, nem tudnak helyet cserélni, pedig itt az kéne.

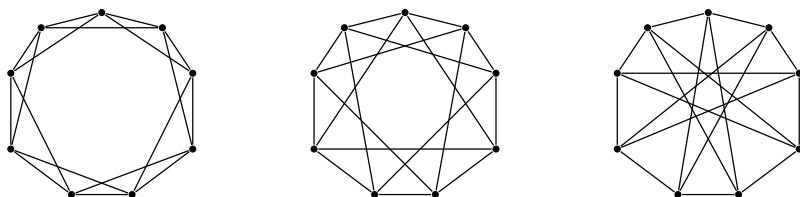
21. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely n csúcsú fa, és minden éle azonos színű.

Megoldás: Azt már tudjuk, hogy egy gráf vagy a komplementere összefüggő. Tehát vagy a piros, vagy a kék élek összefüggő gráfot alkotnak, ennek meg mindig van feszítőfája.

22. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélek. Mi lehet ez a két szám?

Megoldás: Minden fának van levele, tehát az egyik fokszám az 1. Mondjuk y darab 1 fokú van és $8 - y$ darab x fokú, $2 \leq x \leq 7$. Végigszaladva ezen a 6 lehetőségen: $x = 2, y = 2$; $x = 3, y = 5$; $x = 4, y = 6$; $x = 7, y = 7$; ilyenek vannak is.

23. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?

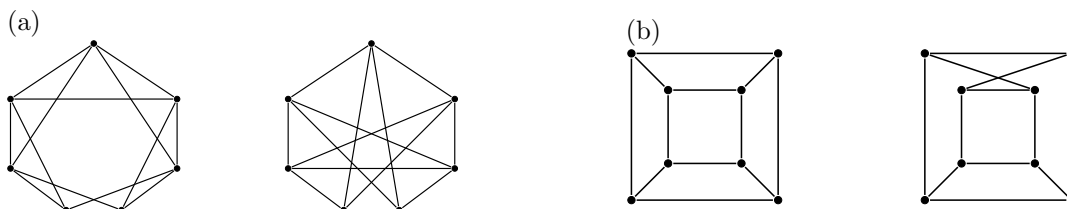


Megoldás: A két szélső igen. Mindkettő egy 8 hosszú kör, a 2 hosszú átlókkal. De a közepso nem. Pl nem minden éle van benne háromszögben, a másik kettőnek igen. Vagy csak három háromszög van benne, a másik kettőben több.

24. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.

Megoldás: Ha nincs benne kör, akkor max egy feszítőfája van. Ha van benne kör, akkor viszont az legalább 3 hosszú, és ennek bármelyik élét elhagyhatjuk, a többit megtartjuk, és kiegészítjük feszítőfává. Ez legalább 3 különböző feszítőfa.

25. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?



Megoldás: (a): igen, mindkettő C_7 komplementere. (b): nem, a másodikban van C_5 , az elsőben egyáltalán nincs páratlan hosszú kör.

26. Egy fa Prüfer kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?

Megoldás: $w_1 = 7$, a legkisebb szám, ami nem szerepel a sorozatban. A kód 8 hosszú, tehát $n = 10$. A kibővített Prüfer kód: $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 10)$. Erre alkalmazva a fenti eljárást, az élek: 37, 13, 48, 14, 51, 95, 29, 62, 106.

27. Bizonyítsuk be, hogy ha F fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az F -beli csúcsok maximális fokszáma.

Megoldás: Egy maximális fokú csúcsból kiinduló maximális utak másik végei levelek, különben tovább mehetnénk. Vagy Prüferrel: a Prüfer kód $n - 2$ hosszú, a v csúcs $d - 1$ -szer van benne, a maradék $n - d - 1$ hosszú kódból legalább d másik csúcs hiányzik.

28. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.

Megoldás: Fokszámok összege $2n - 2$. Ha l darab levél van, akkor a többi csúcs foka legalább 4. $2n - 2 = \sum d_i \geq l + 4(n - l) = 4n - 3l$. Ebből $3l - 2 \geq 2n, l > 2n/3$.

29. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10),

(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1),

(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)

ill. (5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)?

Megoldás: Standard módszerrel, $11 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 12$,

$11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 12$,

$1 - 7, 2 - 8, 1 - 2, 3 - 9, 1 - 3, 4 - 10, 1 - 4, 5 - 11, 1 - 5, 6 - 1, 12 - 6.$

$5 - 1, 4 - 3, 8 - 4, 2 - 5, 2 - 6, 2 - 7, 8 - 2, 9 - 8.$

30. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?

Megoldás: Csupa különböző: $n - 2$ csúcs foka 2, 2 csúcsé 1, út. Csupa azonos: 1 fok $n - 1$, a többi 1, csillag.

31. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)

Megoldás: Ez egy dupla csillag. Vagyis két szomszédos csúcs, u, v , és minden más csúcs u és v közül valamelyikhez van bekötve. De legalább egy u -hoz és legalább egy v -hez. Ilyen $\binom{n}{2}(2^{n-2} - 2)$ van.

32. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?

Megoldás: Vagyis n nem szerepel a Prüfer-kódban, $(n - 1)^{n-2}$.

33. A $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n - 2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?

Megoldás: Ez két diszjunkt n csúcsú fa: $\binom{2n}{n}n^{n-2}n^{n-2}/2$.

34. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \dots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartalmazza?

Megoldás: Inkább vonjuk ki az összesből (8^6) azokat, amik $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$ éleket tartamaznak. Azok a fák, amik az $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$ éleket tartamaznak, ezen élek összehúzásával megfelelnek egy fának az $12, 34, 56, 78$ csúcsokon. Ilyen fa 4^2 van, de mind a 3 él négyféle eredeti élből származhat, tehát a válasz: $8^6 - 4^2 \cdot 4^3$.

35. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy d_1, d_2, \dots, d_n egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2$.

Megoldás: Nyilván szükséges a feltétel, elégségesség: 1. Indukcióval: $d_n = 1$ mert az összeg $2n - 2$, kössük össze a d_1 -es fokúval, új fokszámsorozat $n - 1$ csúcson, indukció. 2. Írjunk föl egy olyan Prüfer kódot, amiben az i d_i -1-szer szerepel, ez éppen $n - 2$ hosszú lesz, az ennek megfelelő fa pont jó.

36. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.

Megoldás: Vegyünk két leghosszabb utat. Ha diszjunktak, mivel a fa összefüggő, van egy mindkettőtől éldiszjunkt út az egyik valamelyik pontjától a másik valamelyik pontjáig. Ez, plusz a két út nagyobbik fele, hosszabb út lenne.

37. Bizonyítsuk be, hogy egy fában az összes leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*)

Megoldás: Egy konkrét leghosszabb utat minden más leghosszabb út egy intervallumban (rész-útban) metsz, és mivel bármely két út metszi egymást, bármely két intervallum is metszi egymást, különben lenne a fában kör. Akkor viszont az összes intervallum metszi egymást. (Vegyük a legkésőbb kezdődő és a legkorábban végződő intervallumot, ezek metszetét minden tartalmazza.)

Házi feladatok

1. Adjuk meg az összes önkomplementer fát!
2. Hány olyan fa van a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon, amelynek v_1v_2 éle?