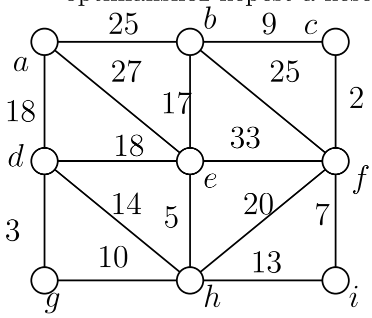
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

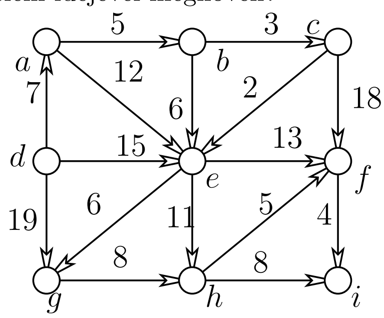
13. gyakorlat, 2020. május 18-22.

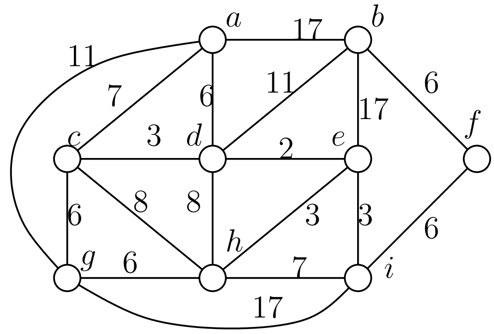
Legrövidebb utak, BFS, DFS, Dijkstra, Ford, Floyd, PERT

Def: Adott a $G=(V,E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy $l:E\to\mathbb{R}$ élhosszfüggvény. Az $uv\in E$ él *hossza* alatt az $l(uv)$-t értjük. A G egy P útjának a *hossza* a P éleinek összhossza. Az $u,v\in V$ pontok *távolságát* $dist_l(u,v)$ jelöli, melyre $dist_l(u,v)=\ell$, ha létezik ℓ hosszúságú uv út G-ben, de ℓ-nél rövidebb nincs. (Ha nincs uv-út G-ben, akkor $dist_l(u,v)=\infty$. Ha nem adjuk meg az l távolságfüggvényt, akkor az $l\equiv 1$ függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

1. Adott a $G=(V,E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l:E\to\mathbb{R}$ élhosszfüggvény, egy $r\in V$ gyökérpont, valamint egy k pozitív egész. Tegyük fel, hogy l olyan, hogy nincs negatív összhosszúságú kör. Tervezzünk olyan gyors algoritmust, amely megtalálja G-nek mindazon v csúcsait, amelyekbe vezet r-ből legfeljebb k élből álló legrövidebb út.
2. A D irányított gráf *topologikus rendezése* a D csúcsainak egy olyan $v_1,v_2,\dots,v_n$ sorrendje, amelyre az teljesül, hogy $v_iv_j\in E$ esetén $i<j$ (azaz minden él ,,balról jobbra" mutat). Igazoljuk, hogy D-nek pontosan akkor van topologikus sorrendje, ha D DAG.
3. Mutassuk meg, hogy ha D DAG, akkor a mélységi keresése utáni befejezési sorrend megfordítása topologikus rendezést ad.
4. Határozzuk meg a középső ábrán megadott PERT probléma minden tevékenységéhez a legkorábbi kezdési időpontot, valamint a c tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható. Melyik tevékenységek kritikusak, azaz melyek azok a csúcsok, amelyeknek a kezdési időpontjában történő bármely késedelem a teljes PERT feladat befejezését az optimálishoz képest a késedelem idejével megnöveli?







5. Mi köze a PERT problémának a legrövidebb utakhoz?
6. Tervezzünk hatékony algoritmust, amely adott PERT probléma és adott u és v tevékenységek (gráfcsúcsok) esetén a PERT feladatnak olyan optimális ütemezését adja meg (már amennyiben ilyen létezik), amelyben az u tevékenységet hamarabb kezdjük v-nél.

Házi feladat.

1. G egy irányított gráf, gráf élein egy $l:E\to\mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tudjuk, hogy G-ben nincs negatív összsúlyú kör. A csúcsok egy része piros, a többi kék. Adjunk egy hatékony (polinomiális) algoritmust, amely bármely két pont között megadja a legrövidebb olyan út hosszát, amely tartalmaz piros pontot.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden irányított gráf két DAG uniója. (Vagyis kiszínezhetők az élek pirossal és kékkel úgy, hogy az egyszínű élek DAG-ot alkotnak.)

3. A G irányítatlan gráfnak az az izgalmas tulajdonsága van, hogy akárhonnan induló, akármilyen sorrendű mélységi fája egy, a gyökérből induló Hamilton út. Bizonyítsuk be, hogy G 2-összefüggő. Mutassunk ilyen tulajdonságú gráfot, ami nem 3-összefüggő.