Kombinatorika és gráfelmélet 1.

13. gyakorlat, 2020. május 18-22.

Legrövidebb utak, BFS, DFS, Dijkstra, Ford, Floyd, PERT

Def: Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfüggvény. Az $uv \in E$ él *hossza* alatt az $l(uv)$-t értjük. A G egy P útjának a *hossza* a P éleinek összhossza. Az $u, v \in V$ pontok *távolságát* $dist_l(u, v)$ jelöli, melyre $dist_l(u, v) = \ell$, ha létezik ℓ hosszúságú uv út G-ben, de ℓ-nél rövidebb nincs. (Ha nincs uv-út G-ben, akkor $dist_l(u, v) = \infty$. Ha nem adjuk meg az l távolságfüggvényt, akkor az $l \equiv 1$ függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

1. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfüggvény, egy $r \in V$ gyökérpont, valamint egy k pozitív egész. Tegyük fel, hogy l olyan, hogy nincs negatív összhosszúságú kör. Tervezzünk olyan gyors algoritmust, amely megtalálja G-nek mindazon v csúcsait, amelyekbe vezet r-ből legfeljebb k élből álló legrövidebb út.

   Megoldás: A Fordot módosítjuk úgy, hogy minden javításnál nyilvántartjuk, hogy melyik csúcsból javítottunk, és azt hogy hány élű az eddigi legkevesebb élből álló legrövidebb út ebbe a csúcsba. (Ha egy élmenti javításnál ugyanazt a távolságot kapjuk, de az élszám csökken, akkor is javítunk.) A Ford végén a nyilvántartott mutatók egy olyan legrövidebb utak fáját adják, amelyik a gyökérből minden pontba egy legkevesebb élű legrövidebb utat tartalmaz. A fában a gyökértől legfeljebb k élen elérhető pontok adják a keresett halmazt.

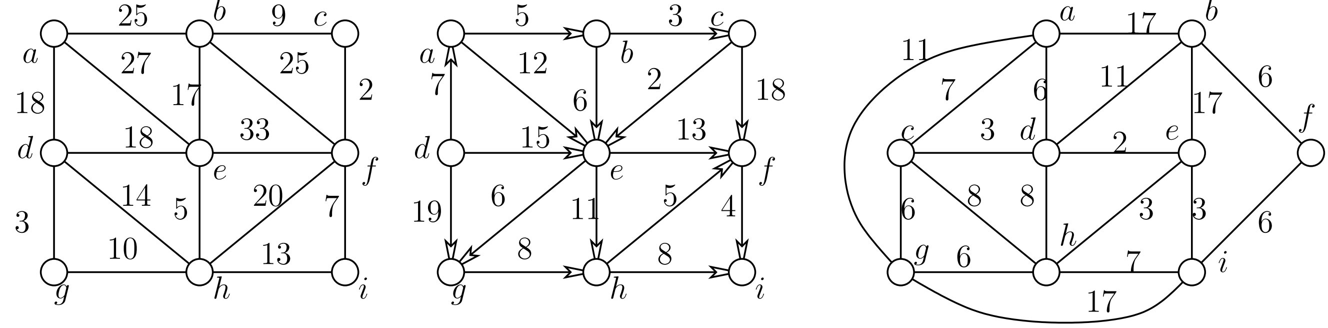
2. A D irányított gráf *topologikus rendezése* a D csúcsainak egy olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre az teljesül, hogy $v_i v_j \in E$ esetén $i < j$ (azaz minden él ,,balról jobbra" mutat). Igazoljuk, hogy D-nek pontosan akkor van topologikus sorrendje, ha D DAG.

   Megoldás: Tegyük fel, hogy van topologikus rendezés. Mivel minden él ,,balról jobbra" mutat, vagyis minden él végpontjának az indexe nagyobb, mint a kezdőponté, vilagos, hogy nincs irányított kör. Most tegyük fel, hogy nincs irányított kör. Ekkor viszont biztos van olyan pont, amiből nem megy ki él (nyelő), mert ha nem lenne, akkor elindulhatnánk egy irányított út mentén és sose akadnánk el, ezért végül talalnánk egy irányított kört. Most ezt a nyelőt tegyük be utolsónak a rendezésben, es keressünk egy új nyelőt, stb.

3. Mutassuk meg, hogy ha D DAG, akkor a mélységi keresése utáni befejezési sorrend megfordítása topologikus rendezést ad.

   Megoldás: Az elsőnek befejezett pontból csak visszaél indulhat. Viszont mivel D DAG, ilyen nincs, tehát ez a csúcs nyelő. Ha töröljük ezt a pontot a gráfból, akkor a DFS ugyanúgy fut, csak ezt a pontot nem találja meg. Szóval a másodiknak befejezett pont nyelő az első pont törlésével keletkező gráfban, stb.

4. Határozzuk meg a középső ábrán megadott PERT probléma minden tevékenységéhez a legkorábbi kezdési időpontot, valamint a c tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható. Melyik tevékenységek kritikusak, azaz melyek azok a csúcsok, amelyeknek a kezdési időpontjában történő bármely késedelem a teljes PERT feladat befejezését az optimálishoz képest a késedelem idejével megnöveli?



   Megoldás: Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $d, a, b, c, e, g, h, f, i$ sorrendet. Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) Meg kell még határoznunk a c tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a projekt még a lehető legrövidebb időn belül befejezhető. Vegyük észre, hogy a c tevékenység kezdése közvetlenül csak azokra a tevékenységekre hat, amelyekbe c-ből él fut, konkrétan az e és f tevékenységekre. Azonban e és f mindegyike rajta van a $daeghfi$ kritikus úton, így ezeknek a tevékenységeknek muszáj az imént kiszámított kezdési időben elkezdődniük. A c tevékenység legkésőbbi kezdési ideje tehát az a legnagyobb érték, ami még nem veszélyezteti e és f időbeni kezdését. A ce él miatt c nem kezdődhet 17-nél, a cf él miatt pedig 20-nál később. A válasz tehát a 17 kezdési idő a c tevékenységre.

5. Mi köze a PERT problémának a legrövidebb utakhoz?

   Megoldás: A PERT-ben minden v csúcshoz egy v-be vezető (bárhonnan induló) leghosszabb utat keresünk. Ez az úthossz lesz az adott v csúcsnak megfelelő tevékenység legkorábbi kezdési ideje. A leghosszabb út meg mindjárt legrövidebb lesz, ha negáljuk az élhosszokat. Negatív élhosszokkal meg akkor tudunk legrövidebb utat keresni (pl Forddal vagy Floyddal), ha nincs negatív kör. Ja, és ilyen nincs, hisz kör sincs. A PERT módszer egy ezektől különböző (és hatékonyabb) dinamikus programozási eljárás, viszont csak akkor alkalmazhatjuk, ha nincs irányított kör.

6. Tervezzünk hatékony algoritmust, amely adott PERT probléma és adott u és v tevékenységek (gráfcsúcsok) esetén a PERT feladatnak olyan optimális ütemezését adja meg (már amennyiben ilyen létezik), amelyben az u tevékenységet hamarabb kezdjük v-nél.

   1. megoldás: Bevezetünk egy 0 hosszú uv élt. Ha ezáltal a gráf DAG marad és az optimum sem változik, akkor van ilyen ütemezés (és a PERT meg is találja a kiegészített gráfon futtatva), ha nem, akkor nem.

   2. megoldás: Megnézzük, hogy van-e v-ből út u-ba. Ha igen, akkor egyáltalán nincs ilyen ütemezés. Ha nincs út, akkor meghatározzuk u legkorábbi és v legkésőbbi kezdési idejét optimális ütemezés mellett. (Ez két PERT feladat megoldását jelenti, a második a fordíott élű gráfon (fordított top sorrenddel) történik.) Ha az utóbbi kezdési idő az előbbit követi, akkor igen a válasz, egyébként meg nem. Ugyanis tekintsük a sima PERT által adott f ütemezést, amikor mindent a lehető leghamarabb kezdünk el, és nézzük azt a g-t, amikor mindent az utolsó pillanatban. Ha most minden u előtti tevékenységet az f szerint, az összes többit meg a g szerint kezdjük, akkor olyan optimális ütemezést kapunk, amiben u megelőzi v-t.

Házi feladat.

1. G egy irányított gráf, gráf élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tudjuk, hogy G-ben nincs negatív összsúlyú kör. A csúcsok egy része piros, a többi kék. Adjunk egy hatékony (polinomiális) algoritmust, amely bármely két pont között megadja a legrövidebb olyan út hosszát, amely tartalmaz piros pontot.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden irányított gráf két DAG uniója. (Vagyis kiszínezhetők az élek pirossal és kékkel úgy, hogy az egyszínű élek DAG-ot alkotnak.)

3. A G irányítatlan gráfnak az az izgalmas tulajdonsága van, hogy akárhonnan induló, akármilyen sorrendű mélységi fája egy, a gyökérből induló Hamilton út. Bizonyítsuk be, hogy G 2-összefüggő. Mutassunk ilyen tulajdonságú gráfot, ami nem 3-összefüggő.