

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

12. gyakorlat, 2020. május 11-15.

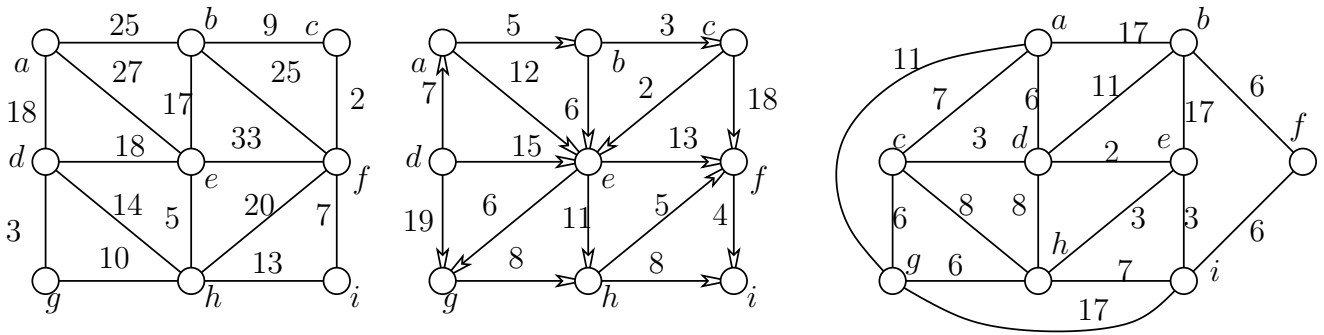
Legrövidebb utak, BFS, DFS, Dijkstra, Ford

Def: Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ élhosszfüggvény. Az $uv \in E$ él hossza alatt az $l(uv)$ -t értjük. A G egy P útjának a hossza a P éleinek összhossza. Az $u, v \in V$ pontok távolságát $dist_l(u, v)$ jelöli, melyre $dist_l(u, v) = \ell$, ha létezik ℓ hosszúságú uv út G -ben, de ℓ -nél rövidebb nincs. (Ha nincs uv -út G -ben, akkor $dist_l(u, v) = \infty$. Ha nem adjuk meg az l távolságfüggvényt, akkor az $l \equiv 1$ függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

1. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény. Tegyük fel, hogy egy u -ből v -be vezető élsorozat éleinek összhossza ℓ . Igazoljuk, hogy $dist_l(u, v) \leq \ell$.
2. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény, valamint egy $r \in V$ gyökérpont. Tegyük fel, hogy $d(r) = 0$, továbbá $d(v) \geq dist_l(r, v)$ teljesül minden $r \neq v \in V$ esetén. Ha valamely $uv \in E$ esetén $d(v) > d(u) + l(u, v)$, akkor végrehajtható az uv élmenti javítás, amikor is $d(v)$ értékét $d(u) + l(u, v)$ -re csökkentjük.

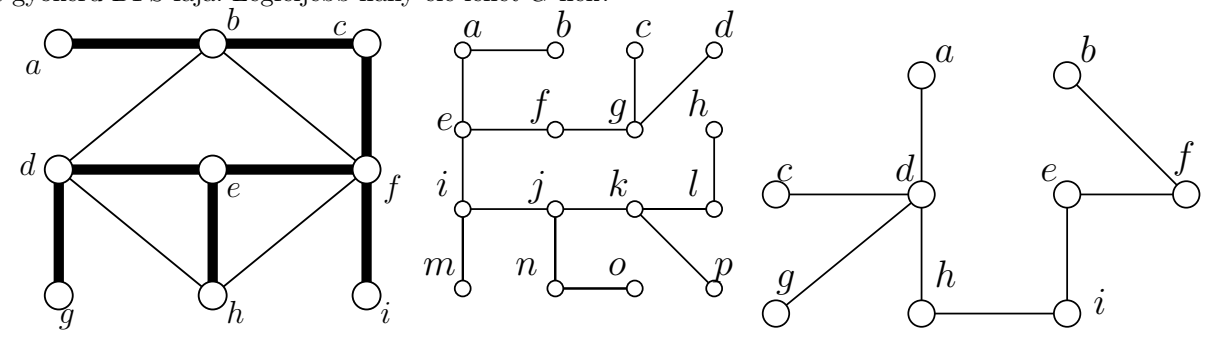
- Igazoljuk, hogy a fenti élmenti javítás után kapott d függvényre $d(v) \geq dist_l(r, v)$ teljesül.
- Mutassuk meg, hogy ha $d(v) = dist_l(r, v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra, akkor nem végezhető élmenti javítás.
- Bizonyítsuk be, hogy ha nem végezhető élmenti javítás, akkor $d(v) = dist_l(r, v)$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.
- Igazak-e a fentiek akkor, ha a távolságfüggvény negatív értékeket is felvehet? Miért?
- Mi a helyzet akkor, ha a $dist_l(u, v)$ definíciójában legrövidebb út helyett legrövidebb élsorozattal dolgozunk?

3. Hogyan lehet zsineggel, vonalzóval és csavaralátétekkel nemnegatív élhosszok mellett irányítatlan gráfban legrövidebb utat meghatározni?
4. Törpfallán járvány ütötte fel a fejét az követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem hallgatnak a WHO-ra, sőt, az Operatív Törzsre sem, és nem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfallán 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
5. Tervezzünk hatékony algoritmust, amelynek inputja egy (szomszédossági mátrixával megadott) $G = (V, E)$ (irányított) gráf és egy k szám, outputja pedig minden $u, v \in$ csúcspárra megadja, hogy G -ben hány különböző u -ból v -be vezető k élből álló élsorozat található. (Pl. $k = 1$ esetén az inputként megadott szomszédossági mátrix outputnak is kiváló.)
6. Legyenek $l_1, l_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvények a $G = (V, E)$ gráfon. Igaz-e, hogy ilyenkor $dist_{l_1}(u, v) + dist_{l_2}(u, v) = dist_{l_1+l_2}(u, v)$ mindig teljesül minden $u, v \in V$ -re?
7. Az alábbi bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e -től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat. A középső ábrán látható gráfban találjunk minden pontból egy legrövidebb utat i -be.



8. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A fenti jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült ösztávót is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (Az utcák által határolt beépített területek felett repülési tilalom van érvényben.)

9. Lehetséges-e, hogy a bal oldali ábrán látható G gráf megvastagított élei a G egy mélységi fáját alkotják?
10. Az alábbi középső ábrán látható a G irányítatlan gráfnak egy i gyökből induló mélységi bejárása után kapott F feszítőfája. Tudjuk, hogy az e csúcs G -beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e -ből induló éleit.
11. Tegyük fel, hogy az alábbi jobb oldali ábrán látható F fa a G gráfnak egyszerre az h -gyökerű BFS fája és a d -gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G -nek?



12. Mutassunk példát olyan irányított $D = (V, E)$ gráfra, az éleken egy $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ hosszfüggvényre, hogy alkalmas $s \in V$ pontból indítva a Dijkstra algoritmust, helytelen eredményt kapunk.

Házi feladat.

- Adott $G = (V, E)$ gráf és $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény esetén legyen $f(v) := \max\{dist_l(v, u) : u \in V\}$. Határozzuk meg, a $\max\{\frac{f(v)}{f(u)} : u, v \in V(G)\}$ érték maximumát, ha G tetszőleges véges, irányítatlan gráf lehet.
- Legyen G egy erősen összefüggő irányított gráf, az éleken súlyok. Legyen C egy negatív összsúlyú kör az x, y, z, u csúcsokon.
Elkezdjük futtatni a Ford algoritmust az x pontból. Bizonyítsuk be, hogy minden ciklus után az $d(x), d(y), d(z), d(u)$ becslések közül legalább egy csökkenni fog.
- Legyen G egy erősen összefüggő irányított gráf, az éleken 1-nél nagyobb súlyok. Egy út súlya (hossza) a rajta levő élek súlyainak a *szorzata*. A v pont távolsága u -tól a legkisebb súlyu uv út súlya. Adjunk hatékony algoritmust s -től az összes többi pont távolságának meghatározására.