

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

12. gyakorlat, 2020. május 11-15.

*Legrövidebb utak, BFS, DFS, Dijkstra, Ford*

**Def:** Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfüggvény. Az  $uv \in E$  él hossza alatt az  $l(uv)$ -t értjük. A  $G$  egy  $P$  útjának a hossza a  $P$  éleinek összhossza. Az  $u, v \in V$  pontok távolságát  $dist_l(u, v)$  jelöli, melyre  $dist_l(u, v) = \ell$ , ha létezik  $\ell$  hosszúságú  $uv$  út  $G$ -ben, de  $\ell$ -nél rövidebb nincs. (Ha nincs  $uv$ -út  $G$ -ben, akkor  $dist_l(u, v) = \infty$ . Ha nem adjuk meg az  $l$  távolságfüggvényt, akkor az  $l \equiv 1$  függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

1. Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvény. Tegyük fel, hogy egy  $u$ -ból  $v$ -be vezető élsorozat éleinek összhossza  $\ell$ . Igazoljuk, hogy  $dist_l(u, v) \leq \ell$ .

*Megoldás:* Induljunk el  $u$ -ból az élsorozat mentén, és minden csúcsba megérkezve azon az élen menjünk tovább, ami az élsorozatnak az adott csúcsból kiinduló élei közül az élsorozatban a legkésőbb található. Így olyan  $uv$ -utat kapunk, aminek a hossza legfeljebb az élsorozat éleinek összhossza.

2. Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvény, valamint egy  $r \in V$  gyökérpont. Tegyük fel, hogy  $d(r) = 0$ , továbbá  $d(v) \geq dist_l(r, v)$  teljesül minden  $r \neq v \in V$  esetén. Ha valamely  $uv \in E$  esetén  $d(v) > d(u) + l(u, v)$ , akkor végrehajtható az  $uv$  élmenti javítás, amikor is  $d(v)$  értékét  $d(u) + l(u, v)$ -re csökkentjük.

- Igazoljuk, hogy a fenti élmenti javítás után kapott  $d$  függvényre  $d(v) \geq dist_l(r, v)$  teljesül.

*Megoldás:* Van  $r$ -ből legfeljebb  $d(u)$  hosszú  $ru$ -út, ezt az  $uv$  éllel kiegészítve egy legfeljebb  $d(u) + l(u, v)$  hosszú  $rv$ -élsorozatot kapunk, és ennél a legrövidebb  $rv$ -út sem lehet hosszabb.

- Mutassuk meg, hogy ha  $d(v) = dist_l(r, v)$  teljesül minden  $v \in V$  pontra, akkor nem végezhető élmenti javítás.

*Megoldás:* Az előző megfigyelésből következik, hogy a javítás utáni  $d$  függvény is felső becslés a távolságokra. Ám ez a  $d(v)$  csökkentése után nem teljesül.

- Bizonyítsuk be, hogy ha nem végezhető élmenti javítás, akkor  $d(v) = dist_l(r, v)$  teljesül minden  $v \in V$  csúcsra.

*Megoldás:* Ha  $d(v) > dist_l(r, v)$ , akkor egy legrövidebb  $rv$ -út valamelyik éle mentén lehet javítani.

- Igazak-e a fentiek akkor, ha a távolságfüggvény negatív értékeket is felvehet? Miért?

*Megoldás:* Az első kettő nem igaz. Ellenpélda egy  $C_3$ , minden él hossza  $-1$ . Ekkor  $d \cong dist_l$  esetén végezhető élmenti javítás (csak a jobb becslést realizáló élsorozat már nem út). A harmadik ugyan igaz, de azzal meg az a gond, hogy előfordulhat, hogy mindig van élmenti javítás. Ez viszont csak akkor fordul elő, ha van negatív kör. Egyébként, ha viszont nincs negatív kör, akkor igaz marad.

- Mi a helyzet akkor, ha a  $dist_l(u, v)$  definíciójában legrövidebb út helyett legrövidebb élsorozattal dolgozunk?

*Megoldás:* Ha nincs negatív kör, akkor mindegy, hogy úttal vagy élsorozattal definiáljuk a távolságot. Ha van, akkor viszont bizonyos távolságok közül néhány így  $-\infty$  lesz.

3. Hogyan lehet zsineggel, vonalzóval és csavaralátétekkel nemnegatív élhosszok mellett irányítatlan gráfban legrövidebb utat meghatározni?

*Megoldás:* Elkészítjük a gráf modelljét: az alátétek a csúcsok, és megfelelő hosszúságú zsinegek az élek. Ekkor egy csúcsnál fogva felemelve a gráfot, a többi csúcs mindegyike pontosan annyival lesz alatta, mint a két csúcs távolsága. A kifeszülő zsinegek pedig pontosan azok az élek, amelyek a gyökérből induló, egyik legrövidebb úton rajta vannak.

4. Törpfallán járvány ütötte fel a fejét az követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem hallgatnak a WHO-ra, sőt, az Operatív Törzsre sem, és nem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az

utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpöfalván 100 törp él, akkor a járválynak a kiterjedését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?

*Megoldás:* Húzzuk össze egy ponttá a kezdetben fertőzött törpöket a barátsággráfban. A járvány BFS szerint terjed a gráfban a gyökértől kifelé.

Ismerkedős törpökkel akármeddig eltarthat a járvány. Ha az ismeretségi gráf egy 3 pontú út, és miután az első törpe kigyógyul, megismerkedik az utolsóval, akkor a járvány körbe-körbe jár a kör mentén.

5. Tervezzünk hatékony algoritmust, amelynek inputja egy (szomszédossági mátrixával megadott)  $G = (V, E)$  (irányított) gráf és egy  $k$  szám, outputja pedig minden  $u, v \in$  csúcspárra megadja, hogy  $G$ -ben hány különböző  $u$ -ból  $v$ -be vezető  $k$  élből álló élsorozat található. (Pl.  $k = 1$  esetén az inputként megadott szomszédossági mátrix outputnak is kiváló.)

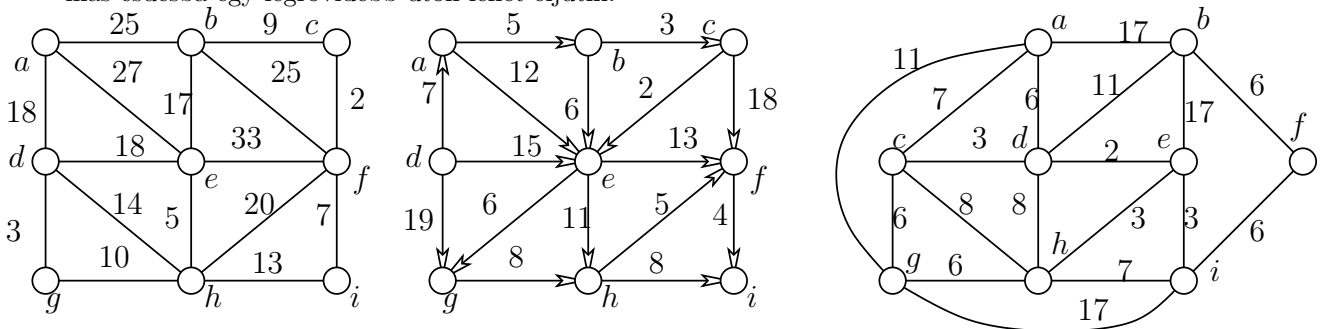
*Megoldás:* A szomszédossági mátrix  $k$ -dik hatványát kell kiszámolni, pl gyors hatványozással.

6. Legyenek  $l_1, l_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvények a  $G = (V, E)$  gráfon. Igaz-e, hogy ilyenkor  $dist_{l_1}(u, v) + dist_{l_2}(u, v) = dist_{l_1+l_2}(u, v)$  mindig teljesül minden  $u, v \in V$ -re?

*Megoldás:* Abszolút nem. Legyen két párhuzamos  $uv$  él  $G$ -ben,  $e$  és  $f$ . Legyen  $l_1(e) = 1, l_1(f) = 2, l_2(e) = 2, l_2(f) = 1$ . Ekkor  $dist_{l_1}(u, v) = dist_{l_2}(u, v) = 1$ , de  $dist_{l_1+l_2}(u, v) = 3$ .

7. Az alábbi bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden  $e$ -től különböző  $v$  csúcsra egy legrövidebb  $ev$  utat. A középső ábrán látható gráfban találjunk minden pontból egy legrövidebb utat  $i$ -be.

*Megoldás:* Nemnegatív élhosszokkal megadott gráf egy csúcsából kell megtalálni minden más csúcsba egy legrövidebb utat. Az órán tanult Dijkstra algoritmus alkalmas erre. Ha az algoritmus végrehajtása során minden csúcshoz megjelölünk egy olyan élt, amely az adott csúcs gyökértől való távolságát beállította, akkor a megjelölt élek alkotta feszítőfa rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a gyökérből annak mentén minden más csúcsba egy legrövidebb úton lehet eljutni.



8. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A fenti jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült ösztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (Az utcák által határolt beépített területek felett repülési tilalom van érvényben.)

*Megoldás:*

Vizsgáljuk egy optimális megoldást! Órarugógerincű barátunk útja a megadott gráf egy olyan zárt élsorozatának felel meg, ami minden élt legalább egyszer tartalmaz. Készítsük el azt a gráfot, amelyet az ábrabeliből úgy kapunk, hogy minden élt annyi párhuzamos példányban húzunk be, ahányszor OF végigrepült az adott útszakaszon. Az így kapott  $G'$  gráfon OF útja egy Euler-körséta lesz. A feladatunk tehát az, hogy a lehető legkisebb összhosszúságú párhuzamos élek behúzásával elérjük, hogy a kapott  $G'$  gráfnak legyen

Euler-körsétája. Mivel az eredeti  $G$  gráf összefüggő, ezért az Euler-körséta létezésére vonatkozó, órán tanult tétel szerint csupán azt kell elérni, hogy minden foksám páros legyen a párhuzamos élek behúzása után. Világos, hogy egyetlen élnek sem érdemes két párhuzamos példányát behúzni az eredeti mellé, hiszen ekkor kettővel kevesebb párhuzamos példányt behúzva egyrészt párosak maradnának a foksámok, másrészt a párhuzamosan behúzott élek összhossza csökkenne. Márpedig egy fenyegető menyétinvázió árnyékában egyetlen hazafi sem vállalhat felesleges sétarepülést. Az ábrán megadott gráfnak pontosan két páratlan fokú pontja van:  $d$  és  $h$ . A megpárhuzamosított élek tehát egy  $d$  és  $h$  közötti utat jelölnek ki  $G$ -ben, a mi célunk pedig ezen út összhosszának minimalizálása.

Egy legrövidebb  $dh$  utat kell tehát keresnünk. Ez a tanult algoritmusok nélkül is megy, hiszen a  $deh$  út hossza 5, és ennél rövidebb élen csak  $c$ -be juthatunk  $d$ -ből, ahonnan nem lehet 5-nél rövidebb élen folytatni az utat. OF optimális útvonala tehát olyan lesz, ami minden élt pontosan egyszer jár be, kivéve a kétszer bejárt  $de$  és  $dh$  éleket. A feladat szerint meg is kell tervezni egy ilyen útvonalat. Erre egy lehetőség egy tetszőleges Euler-séta  $d$ -ből  $h$ -ba, majd a  $he$  ill  $ed$  élek bejárása. Szegény Felpattanó! Rajta tán még ez sem segít. Nosza, itt egy itiner, hogy még Mutyipusztán is értsék:  $dcabdebfi ehgchadhed$

9. Lehetséges-e, hogy a bal oldali ábrán látható  $G$  gráf megvastagított élei a  $G$  egy mélységi fáját alkotják?

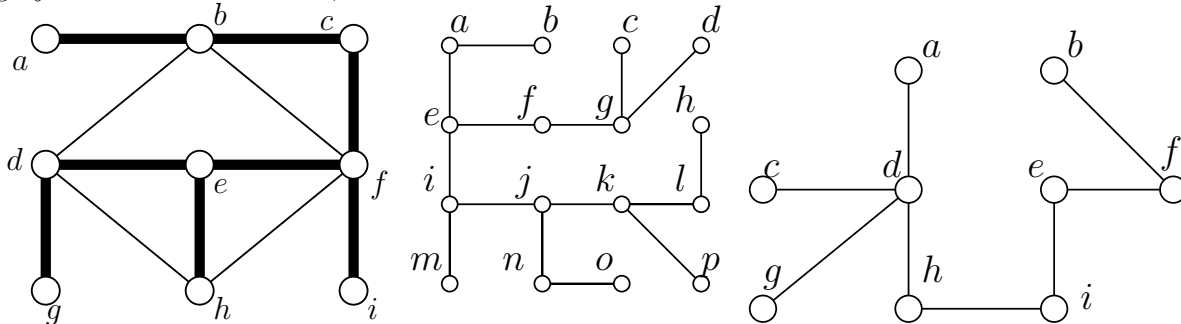
*Megoldás:* Irányítatlan gráfban DFS után nincs keresztél. Ha  $dh$  nem keresztél, akkor a gyökér nem lehet  $a, b, c, e, f, i$ . Ha  $hf$  nem keresztél, akkor a gyökér nem lehet  $g, d, e$ . Egyedül  $h$ -t nem zártuk ki, azonban ha  $h$  lenne a gyökér, akkor  $bd$  keresztél volna. Igazoltuk tehát, hogy a vastag élek nem alkotják a  $G$  feszítőfáját.

10. Az alábbi középső ábrán látható a  $G$  irányítatlan gráfnak egy  $i$  gyökérből induló mélységi bejárása után kapott  $F$  feszítőfája. Tudjuk, hogy az  $e$  csúcs  $G$ -beli fokszáma 7. Határozzuk meg a  $G$  gráf  $e$ -ből induló éleit.

*Megoldás:* Tudjuk, hogy irányítatlan gráf mélységi bejárása utáni osztályozásban a gráfnak nincs keresztéle, azaz olyan éle, amely olyan csúcsokat köt össze, melyek nem leszármazottai egymásnak. Ezek szerint az  $e$  csúcs csakis a fabeli leszármazottaival vagy őseivel lehet összekötve, konkrétan az  $a, b, f, g, c, d$  és  $i$  pontokkal. Mivel tudjuk, hogy  $e$ -nek pontosan 7 szomszédja van, ezért  $e$  szomszédosságát pontosan az iménti 7 pont alkotja, így a  $G$  gráf  $e$ -ből induló élei éppen az  $ea, eb, ef, eg, ec, ed, ei$  élek.

11. Tegyük fel, hogy az alábbi jobb oldali ábrán látható  $F$  fa a  $G$  gráfnak egyszerre az  $h$ -gyökerű BFS fája és a  $d$ -gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet  $G$ -nek?

*Megoldás:* Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráfban a DFS bejárás után nem lesz keresztél, és az is szerepelt, hogy a BFS fának csak olyan csúcsai között futhatnak  $G$  élei, melyek gyökértől mért távolsága legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Tehát  $G$  minden, a megadott fában nem szereplő éle a  $d$  gyökérből nézve leszármazottakat köt össze, míg a  $h$  gyökérből nézve keresztélnek kell lennie. Ebből az következik, hogy csak olyan éle lehet  $G$ -nek a megadottakon kívül, amely  $d$ -ből indul, továbbá (mivel  $d$  a  $h$ -tól 1 távolságra van), az él másik végpontja  $h$ -tól a fában 0, 1 vagy 2 távolságra lehet. Az  $d$  további szomszédai tehát csakis  $i$  és  $e$  lehetnek, ráadásul mindkettő valóban lehet is szomszéd, hisz mind a DFS, mind a BFS meg tudja találni  $F$ -et, ha ezen élek jelenlétében futtatjuk a megfelelő gyökérből. Ez azt jelenti, hogy  $G$ -nek az  $F$  élein túl legfeljebb két további éle lehet, ami összesen 10 él. Ez a válasz tehát a feladat kérdésére.



12. Mutassunk példát olyan irányított  $D = (V, E)$  gráfra, az éleken egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvényre, hogy alkalmas  $s \in V$  pontból indítva a Dijkstra algoritmust, helytelen eredményt kapunk.

*Megoldás:* Legyen  $l(sa) = 1$ ,  $l(sb) = 2$ ,  $l(ba) = -2$ . Az  $a$ -t késznek fogjuk nyilvánítani az első körben, 1 súllyal, pedig  $b$ -n keresztül rövidebb (0 súlyú) úton el lehet hozzá jutni.

### Házi feladat.

1. Adott  $G = (V, E)$  gráf és  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  nemnegatív élhosszfüggvény esetén legyen  $f(v) := \max\{dist_l(v, u) : u \in V\}$ . Határozzuk meg, a  $\max\{\frac{f(v)}{f(u)} : u, v \in V(G)\}$  érték maximumát, ha  $G$  tetszőleges véges, irányítatlan gráf lehet.
2. Legyen  $G$  egy erősen összefüggő irányított gráf, az éleken súlyok. Legyen  $C$  egy negatív összsúlyú kör az  $x, y, z, u$  csúcsokon.  
Elkezdjük futtatni a Ford algoritmust az  $x$  pontból. Bizonyítsuk be, hogy minden ciklus után az  $d(x), d(y), d(z), d(u)$  becslések közül legalább egy csökkenni fog.
3. Legyen  $G$  egy erősen összefüggő irányított gráf, az éleken 1-nél nagyobb súlyok. Egy út súlya (hossza) a rajta levő élek súlyainak a *szorzata*. A  $v$  pont távolsága  $u$ -tól a legkisebb súlyu  $uv$  út súlya. Adjunk hatékony algoritmust  $s$ -től az összes többi pont távolságának meghatározására.