Kombinatorika és gráfelmélet 1.

11. gyakorlat, 2020. április 27-május 1.

Síkgráfok

Tudnivalók:

G síkgráf, ha lerajzolható a síkra metszés nélkül. Tegyük fel, hogy G le van rajzolva a síkra metszés nélkül, n csúcs, e él, t tartomány, k összefüggő komponens. **Euler formula:** $n - e + t = k + 1$.

Következmény: Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú páros síkgráf, akkor $e \leq 2n - 4$. Sőt, ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, amelyben nincs háromszög, már akkor is $e \leq 2n - 4$.

Következmény következménye: K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Négyszíntétel (Appel-Haken 1976) Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 4$. (Ez nem javítható, pl K_4.)

Topologikus izomorfia. Definiálunk két operációt, amelyek egymás inverzei. 1. operáció: A G gráf két szomszédos csúcsa legyen u és v, töröljük el az uv élt és vezessünk be egy új x csúcsot, amelynek két szomszédja van, u és v. 2. operáció: Tegyük fel, hogy G-ben x foka 2, szomszédai u és v. Töröljük el az x csúcsot és az xu, xv éleket, viszont húzzuk be az uv élt.

A G és H gráfok topologikusan izomorfak, ha az 1. és 2. operáció ismételt alkalmazásával el lehet jutni G-ből H-ba.

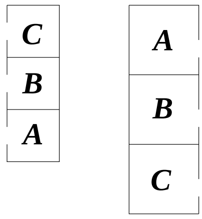
Észrevétel: Tegyük fel, hogy G és H gráfok topologikusan izomorfak. Ekkor G síkgráf $\Leftrightarrow$ H síkgráf.

Kuratovski tétel (1930) G akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz K_5-tel és $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

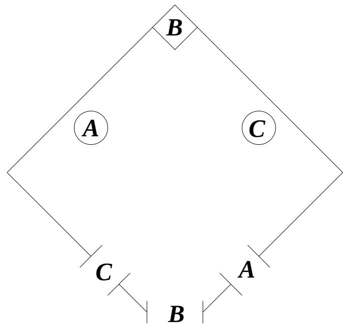
Fáry-Wagner tétel (1936, 1948) Ha G síkgráf, akkor lerajzolható metszés nélkül úgy, hogy az élei egyenes szakaszok.

1. (i) Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráfnak pontosan $3n - 6$ éle van. Bizonyítsuk be, hogy minden tartománya háromszög. (ii) Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.
2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?

   Megoldás:
3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.
4. Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
   a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
   b) ha G-nek $3n - 6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
   c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
   d) G-nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
5. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
6. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és $\overline{G}$ egyike biztosan nem síkgráf.
7. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
8. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
9. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
10. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g, akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.

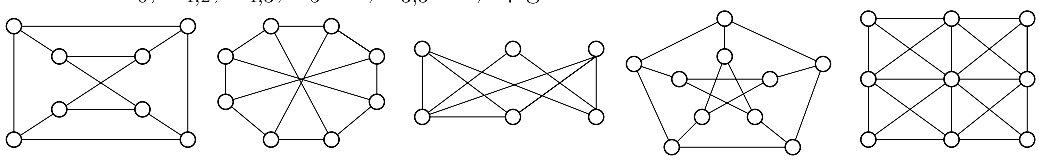


1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

11. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
12. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e, \overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?



13. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
    a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
    b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
14. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
15. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezések lehetséges minimális számát. (Feltesszük, hogy három él nem metszheti egymást ugyanabban a pontban.) Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke? Mennyi $cr(K_6)$?
16. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.
17. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G-be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
18. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
19. (Hanani-Tutte tétel) (*) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!
20. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

    Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakastól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

    b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?

21. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

Házi feladat.

1. Legyen G három síkgráf uniója. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 18$.

2. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + 2e(G) - t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2020 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

3. Az Operatív Törzs szakszerűen feltérképezte az emberek kapcsolati hálóját és a kapott 10000000 csúcsú gráfot sikerült összesen két él-metszéssel felrajzolni az Operatív Központban található Operatív Digitális Táblára.

Bizonyítsuk be, hogy az emberek egy részét (nem 0-t és nem is az összeset) karanténba tudják zárni úgy, hogy legfeljebb 5 kapcsolatot kell hatóságilag megszakítani!