Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2020. február 14.

Elemi leszámlálások, szita-formula

Tudnivalók:

Ismétlés nélküli permutáció: n különböző elem összes lehetséges sorrendje,

$$n!.$$

Ismétléses permutáció: van n féle elem, az i-edik féléből k_i darab. Ezen elemek összes lehetséges különböző sorrendje,

$$\frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

Ismétlés nélküli variáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darabot kiválasztani, sorrend számít,

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/k!.$$

Ismétléses variáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darab nem feltétlenül különbözőt kiválasztani, sorrend számít,

$$n^k$$

Ismétlés nélküli kombiáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darabot kiválasztani, sorrend nem számít,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Ismétléses kombiáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darab nem feltétlenül különbözőt kiválasztani, sorrend nem számít,

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

Egyszerű összefüggések: $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Skatulya elv: n dobozba rakunk $n+1$ tárgyat. Ekkor mindig lesz olyan doboz, amiben legalább két tárgy van.

Erdős–Szekeres tétel: egy n^2+1 hosszú, különböző számokból álló sorozatnak mindig van $n+1$ hosszú, monoton részsorozata.

Szita formula: $A_1, \ldots A_n$ halmazok. $|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum(i\text{-es metszetek})$.

1. A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?

   Megoldás: $9!/(3! \cdot 4! \cdot 2!)$.

2. Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?

   Megoldás: $22!/14!$.

3. A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. A biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?

   Megoldás: 9^4.

4. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találathoz (a tizenháromból)?

   Megoldás: ötöslottó: $\binom{90}{5}$, hatoslottó: $\binom{45}{6}$, totó: 3 elég (csupa 0, csupa 1, csupa x), 2 nem elég.

5. Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?

   Megoldás: $2 \cdot (n!)^2$.

6. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?

   Megoldás: $\binom{9+5}{5}$. összesen 14 lépés, amiből 9-ben avenue-n megyünk (utca szám nő) 5-ször pedig utcán (avenue szám csökken)

7. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?

   Megoldás: $15 \cdot 14 \cdot 13$

8. És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?

   Megoldás: $15 \cdot 14 \cdot 13 - 14 \cdot 13 \cdot 12$ (előzőből levonjuk, ahol Kovács úr hoppon marad)

9. Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?

   Megoldás: $\binom{40}{5})^{16}$.

10. Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepel az 5-ös számjegy? (Egy szám nem kezdődhet 0-val).

    Megoldás: $9000 - 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$. (Az összes tízjegyű számból levonjuk azokat, amiben nincs 5-ös.)

11. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?

    Megoldás: $6 \cdot 5 \cdot 5$ (első csík 6-féle lehet, második 5, harmadik 5) vagy máskepp $6^3 - 6 - 2 \cdot 6 \cdot 5$ (összesen 6^3-féle zászløvan, levonjuk azokat, ahol két szomszédos csík egyforma színű)

    $6 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 4$ (összesből levonjuk azokat, amiben nincs piros)

12. Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemszámú részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?

    Megoldás: Ugyanannyi. A páros és páratlan halmazok párokba állíthatók úgy, hogy az utolso elemet kivesszuk illetve betesszük. 99-re másik megoldás: $\binom{99}{i} = \binom{99}{99-i}$, i es $99 - i$ ellentétes paritású.

13. Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?

    Megoldás: Hat féle dologból választunk összesen 10-et, sorrend nem számít: ismétl'eses kombináció, $n = 6$, $k = 10$, $\binom{10+5}{5}$.

14. Minimálisan hány töréssel lehet egy 4×5-ös csokitáblát egyes kockákra tördelni?

    Megoldás: Mindenképpen 19, minden töréssel eggyel több darab lesz.

15. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben?
    Mik a válaszok futókra?(*)

    Megoldás: Bástya: minden oszlopban max 1 lehet, tehát max 8, ennyit el is lehet helyezni, mégpedig 8!-féleképpen. Futó: külön nézhetjük a fehér és fekete mezőket, monjuk fehér: jó irányból nézve 7 átló, tehát összesen max 14 futó. Ennyit lehet is. Hányféleképpen: a ket szelso egyes kuzul egy lehet, aztán befele haladva 2-2 lehetőség, összesen $(2^4)^2$.

16. Igazoljuk, hogy bármely 5 egymást követő egész szám szorzata osztható 120-szal. Mit mondhatunk k egymást követő egész szám szorzatárol?

    Megoldás: Mivel $\binom{n}{k}$ egész, ezért k egymást követő egész szorzata osztható $k!$-sal.

17. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n számra (i) $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$, (ii) $\Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

    Megoldás: (i) Válasszunk ki n ember közül egy tetszőleges méretű csapatot, egy főnökkel. Mindkét oldal ezt szamolja le. (ii) Mindkét oldalon egy $2n$ elemű halmaz n elemű részhalmazainak száma áll, a bal oldalon a számolásnál két n-es részre osztva az alaphalmazt.

18. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?

    Megoldás: $6^9 \cdot 2$ vagy másképp $6^{10}/3$.

19. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?

    Megoldás: $\binom{90}{5}$.

    $\binom{5}{i} \cdot \binom{85}{5-i}$, $i = 5, 4, 3, 2$.

20. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

    Megoldás: $(2n)!/2^n$. Állítsuk őket sorba $(2n)!$ lehetőség, majd az első n mögé álljon be a második n. Ezután, ha valaki előtt magasabb ember áll, cseréljenek helyet. Ugyanazt az elrendezést 2^n-szer kaptuk meg.

21. Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K	♠	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

    Megoldás: Ha a ♠ helyén egy A lenne, akkor a válasz $\binom{13+8}{8}$ lenne. Vonjuk le azokat az utakat, ami használja a ♠ helyén levő A-t: ez $\binom{8+5}{5} \cdot \binom{5+3}{3}$ út. Tehát a válasz $\binom{13+8}{8} - \binom{8+5}{5} \cdot \binom{5+3}{3}$.

22. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két térfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)

    Megoldás: $8!/(2 \cdot 2 \cdot 2^3) \cdot 3$ vagy másképp $\binom{8}{4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2}$.

23. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?

    Megoldás: Nem egyértelmű, hogy megkülönböztetjük-e a csapatokat. Mondjuk igen. Ekkor sorban kiválasztva a csapatokat: $(\binom{30}{5} \cdot \binom{25}{5} \cdot \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5})/6!$

24. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban $k_1, k_2, \ldots, k_n$ szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?

    Megoldás: Legyen $f = \sum_{i=1}^{n} k_i$, ekkor a válasz $f!/(f-m)!$ vagyis $f(f-1)\cdots(f-m+1)$.

    A második: $\binom{k-l}{l} \cdot 2^l$. Ha összeragasztjuk a házaspárokat, akkor tulajdonképpen l pár és $k-2l$ üres szék van egy sorban. Ez $\binom{k-l}{l}$-féle lehet, és még minden házaspát kétféleképpen ülhet.

25. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezet fognak (a nők is). Természetesen senki sem fog kezet a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezet, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? (*)

Megoldás: 9 embert kérdez meg, tehát 9 különböző választ kap. Egy ember min 0-szor és max 8-szor foghatott kezet, tehát a válaszok éppen $0, 1, \ldots, 8$. A 8-as mindenkivel kezet fogott, csak a házastársával nem. Tehát a házastársa a 0-ás. Ha most tőlük és a kézfogásaiktól eltekintünk, akkor mindenkinek eggyel csökkent a száma, az elH ozőzőhöz hasonlóan itt a 6-os házastársa a 0-ás, stb. Azt kapjuk, hogy az eredeti kézfogásokkal számolva, a házastársak a $8, 0$, $7, 1$, $6, 2$ és $5, 3$, Kovácsné a 4-es.

26. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\varphi(n) = n\prod_{p|n,\ p \text{ prím}}(1-\frac{1}{p})$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

    Megoldás: Szita formulával, $n - n/p_1 - n/p_2 - \cdots + n/(p_1p_2) + \cdots - n/(p_1p_2p_3)\cdots$, n-et kiemelve, szorzattá alakítva kész.

27. Igazoljuk, hogy 2019 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2019 többszöröse legyen.

    Megoldás: Legyenek a számok $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$. Az a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $a_1 + ... + a_{2019}$ számok között vagy van 0 maradékú (mod 2019) vagy van ket azonos maradékú, ezek különbsége jó lesz.

28. A 65 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni a kombi előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnyitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?

    Megoldás: Szita formula, A: senki sem megy kombira, B: senki sem megy évnyitóra, C: senki sem megy kocsmába. $|A \cup B \cup C| = 3^{65} \cdot 3 - 2^{65} \cdot 3 + 1$. Nekunk a komplementere kell: $4^{65} - 3^{65} \cdot 3 + 2^{65} \cdot 3 - 1$.

29. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n, k > 1$ egészek esetén megadható olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{nk}$ különböző számokból álló sorozat, amely nem tartalmaz sem $n+1$ tagú növekedő, sem $k+1$ tagú csökkenő részsorozatot.

    Megoldás: Legyen $0 \le i < k$ és $0 \le j < n$ esetén $a_{in+j} = jk - i$. Növekedő részsorozatban a j, csökkenőben pedig az i növekszik.

30. Mennyi n elem fixpont nélküli permutációinak száma? (Azaz az olyan permutációk száma érdekel bennünket, melyben semmilyen $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ elemre sem teljesül, hogy éppen az i. helyen állna.) Ha ez az érték $f(n)$, akkor mennyi az $f(n)/n!$ arány limesze, ha n tart végtelenhez?

    Megoldás: Szita formulával, $n! - n\cdot(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \cdots = n!(1-1+1/2!-1/3!+1/4!-1/5!+\ldots)$. Ez egyébként tart $n!/e$-hez.

31. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)

    Megoldás: Mind köztudott, $\binom{8}{4} = 70$, tehát ha veszünk 8 nyelvet és minden tolmács megfelel egy 4 elemű részhalmaznak, ami az általa ismert 4 nyelv, akkor ez 70 tolmács és teljesíti a feltételeket. Tehát 8 nyelv elég. Most tegyük fel, hogy 7 nyelv is elég. Ekkor van 35 tolmács, aki mind ismeri vagy egyik se ismeri a 7-es nyelvet. Tehat ezekhez a másik 6 nyelv is elég. Hasonlóan, 18-hoz elég lenne 5 nyelv, 9-hez 4, 5-höz 3, 3-hoz 2, 2-höz 1 nyelv, ami lehetetlen! Tehát 8 nyelvre szükség van.

32. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (*)

    Megoldás: Akárhogy veszünk 4 csúcsot, azoknak megfelel egy metszéspont, és fordítva, minden metszéspontnak megfelel 4 csúcs. Tehát a válasz $\binom{n}{4}$

33. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessék? (*)

    Megoldás: Bármely három rablóhoz kell lennie olyan lakatkulcsnak, ami nekik hiányzik, de két hármashoz ennek különbözőnek kell lenni. Tehát $\binom{10}{3}$ lakat kell. De ennyi elég is, minden hetesnek feleljen meg egy lakat, amihez csak nekik van kulcsuk. $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ tehát kész vagyunk.

34. A HK 18 vezetőjéből hányféleképpen lehet a gólyatábor 9 fős szervezőbizottságát úgy megválasztani, hogy a 7 büntetett előéletű tagból legfeljebb 3 kaphasson helyet a testületben?(*)

    Megoldás: Minden 9-elemű részhalmaz és komplementere közül pontosan az egyik szervezhet. Tehát a válasz $\binom{18}{9}/2$.

Házi feladatok

1. Egy kör alakú asztalnál helyet foglaló n emberből hányféleképpen lehet olyan k-tagú bizottságot kijelölni, amelybe nem kerülnek egymás mellett ülő tagok? (*)
2. a. Az $(x+y)^{100}$ kifejtésében melyik tag együtthatója a legnagyobb?
   b. Az $(x+2y)^{100}$ kifejtésében melyik tag együtthatója a legnagyobb?
   (A *kifejtés* során elvégezzük a beszorzásokat és összevonjuk az azonos szorzatokat, tehát minden tag $C_i x^i y^{100-i}$ alakot ölt alkalmas i-re. A kérdés a C_i együtthatókról szól.)