Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PótZH, 2019. május 17. 10.15-11.45, T 604

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\Delta(G)$: maximális fokszám, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. A G gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq 4$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve éllel, ha $|i-k|+|j-l|=1$. Határozzuk meg G pontösszefüggőségi számát, $\kappa(G)$-t.

(A gráfot úgy is elképzelhetjük, hogy egy 4×4-es négyzetrács pontjai a csúcsok, és két csúcs össze van kötve éllel, ha vizszintesen vagy függőlegesen szomszédosak.) A $v_{1,1}$ csúcsnak (a rács sarka) csak két szomszédja van, $v_{1,2}$ és $v_{2,1}$. Ezt a két pontot elvéve $v_{1,1}$ izolált ponttá válik, tehát $\kappa(G) \leq 2$. 4 pont

Viszont bármely két csúcs között van két pontdiszjunkt út: Ha a két csúcs, v és v' nem is egy sorban és nem is egy oszlopban van, akkor haladhatunk v sorában, majd v' oszlopában, illetve v oszlopában, majd v' sorában. Ha egy sorban vannak, akkor haladhatunk a közös sorban, illetve valamelyik szomszédos sorban. Ha egy oszlopban vannak, akkor hasonlóan járhatunk el. Tehát a Menger tétel alapján $\kappa(G) \geq 2$. 5 pont

Tehát $\kappa(G) = 2$. 1 pont

2. Az 1. feladatban szereplő G gráfra határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\rho(G)$, $\alpha(G)$ értékeket.

Szerencsére ismét páros gráffal van dolgunk! A két osztály: $A = \{v_{i,j} \mid i+j \text{ páros }\}$ és $A = \{v_{i,j} \mid i+j \text{ páratlan }\}$. (Ha a rácsra gondolunk, színezzük ki a csúcsokat sakktábla-szerűen.) Tehát nem csak a Gallai, hanem a Kőnig tételeket is használhatjuk. 3 pont

Tekintsük a következő éleket: $v_{i,j}v_{i,j+1}$, ahol $1 \leq i \leq 4$ és $j = 1$ vagy 3. Ezek éppen egy teljes párosítást alkotnak G-ben. Tehát $\nu(G) = 8$. (Ennyi független élből áll a teljes párosítás, több meg nem fér el mert 16 csúcsunk van.) 4 pont

A Gallai tétel alapján $\nu + \rho = n = 16$, tehát $\rho(G) = 8$. 1 pont

A Kőnig tétel szerint $\nu = \tau$, ezért $\tau(G) = 8$. 1 pont

Végül a másik Gallai alapján $\tau + \alpha = n$, tehát $\alpha(G) = 8$. (Vagy a másik Kőnig alapján $\alpha = \rho$, tehát $\alpha(G) = 8$.) 1 pont

3. A 100 csúcsú egyszerű H gráfra $\chi(H) = 3$, $\Delta(H) = 99$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(H) \geq 50$.

Színezzük ki H csúcsait 3 színnel. A 3 színosztály csúcsai egyenként független ponthalmazt alkotnak. 1 pont

Mivel $\Delta(H) = 99$, van egy v csúcs, amely az összes többi csúccsal össze van kötve. Viszont akkor az ő színe különbözik az összes többi csúcs színétől. 4 pont

Ekkor a másik 2 színosztály együtt 99 csúcsot tartalmaz. Ezért valamelyik mérete legalább $\lceil 99/2 \rceil = 50$. Tehát van 50 független csúcs H-ban, vagyis $\alpha(H) \geq 50$. 5 pont

4. A K gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, v_i és v_j között van él akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 1$, 5, vagy 9. Határozzuk meg $\chi'(K)$-t.

Ismét az a nagy szerencsénk, hogy a gráf páros! A két osztály a páros és páratlan indexű csúcsok halmaza. 3 pont

Ezért alkalmazhatjuk Kőnig tételét. (Ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.) Itt $\Delta(G) = 6$, tehát $\chi'(G) = 6$. 7 pont

5. $G(A, B, E)$ egy egyszerű páros gráf, A és B a két színosztály, $|A| = |B| \geq 3$. Tudjuk, hogy ha a, b, c G három csúcsa és egyáltalán nincs köztük él, akkor vagy $a, b, c \in A$, vagy $a, b, c \in B$. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

Azt állítjuk, hogy minden v csúcs foka, $d(v) \geq n - 1$. Tegyük fel, hogy mondjuk $v \in A$ és $d(v) \leq n - 2$. Ekkor van olyan $u, w \in B$, hogy v nem szomszédos se u-val, se w-vel. Viszont u és w nyilván egymással sem szomszédosak. Ez ellentmond a feltételnek. Tehát valóban, minden csúcs foka legalább $n - 1$. 4 pont

Most pedig ellenőrizzük a Frobenius tétel feltételeit. Nyilván $|A| = |B|$. 1 pont

Most legyen $X \subseteq A$. Ha $|X| \leq n - 1$, akkor, mivel minden X-beli csúcs foka legalább $n - 1$, $|N(X)| \geq n - 1 \geq |X|$. Ha pedig $|X| = n$, akkor $X = A$. Viszont $N(A) = B$, hiszen minden B-beli csúcsnak van A-beli szomszédja (sőt, $n - 1$ is van!). Tehát $|N(X)| = n = |X|$. 4 pont

Ezzel beláttuk, hogy teljesül a Frobenius tétel feltétele, tehát van G-ben teljes párosítás. 1 pont

6. $G(V, E)$ egy egyszerű gráf, $|V| = n \geq 3$, kiszíneztük az éleit 3 színnel, a három színosztály legyen E_1, E_2, E_3. Tudjuk, hogy a $G_1(V, E_2 \cup E_3)$, $G_2(V, E_1 \cup E_3)$, $G_3(V, E_1 \cup E_2)$ gráfok síkgráfok. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb $9n/2$ éle van.

Legyen $|V| = n$. Tudjuk, hogy egy n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle van. 3 pont

Tehát, a feltételek szerint $|E_1| + |E_2| \leq 3n - 6$, $|E_1| + |E_3| \leq 3n - 6$, $|E_2| + |E_3| \leq 3n - 6$. 4 pont

Adjuk össze ezt a három egyenlőtlenéget és osszuk el 2-vel: $|E| = |E_1| + |E_2| + |E_3| \leq 4.5n - 9$. 3 pont