

Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2019. május 7, 14.30-16.00, QBF 09
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végig gondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. A G gráfnak n csúcsa van, v_1, v_2, \dots, v_n , $n > 2$, és 2-pontösszefüggő.

Legyenek a G' $2n$ csúcsú gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_n$. A G' gráfban az u_i és u_j csúcsok, illetve a w_i és w_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha G -ben v_i és v_j össze vannak kötve. Ezenkívül minden i -re u_i és w_i is össze vannak kötve. Más él nincs. (Vagyis vesszük G két példányát és köztük egy teljes párosítást.)

Bizonyítsuk be, hogy G' 3-pontösszefüggő.

Mivel G' nem teljes gráf, azt kell belátnunk, hogy két tetszőleges csúcs elhagyása után összefüggő marad. Legyen az u_1, u_2, \dots, u_n által feszített részgráf G^1 , a w_1, w_2, \dots, w_n által feszített részgráf G^2 . Természetesen G^1 és G^2 is izomorf G -vel. Hagyjunk el két csúcst, x -et és y -t. 2 pont

Tegyük föl, hogy $x, y \in \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Ekkor G^2 teljes egészében megmarad, és a feltételek szerint összefüggő. G^1 megmaradó csúcsai pedig mind hozzá vannak kötve G^2 megfelelő csúcsaihoz, tehát a megmaradt gráf is összefüggő. Természetesen ugyanígy érvelhetünk akkor is, ha $x, y \in \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. 4 pont

Tegyük föl most, hogy $x \in \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ és $y \in \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Mivel G^1 és G^2 is 2-pontösszefüggő, a $G^1 \setminus x$ és a $G^2 \setminus y$ gráfok összefüggők. Mivel $n \geq 3$, van olyan i , hogy $u_i \neq x$ és $w_i \neq y$. Ekkor az $u_i w_i$ él megmaradt, tehát összeköti a $G^1 \setminus x$ és a $G^2 \setminus y$ részeket. Ezért a megmaradt gráf összefüggő. 4 pont

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{100}, v_i$ és v_j akkor és csak akkor van összekötve, ha $i + j = 101$ vagy 103. Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.

Vegyük észre, hogy minden él páros és páratlan indexű csúcs között fut, tehát G páros gráf, a két osztály a páros és páratlan indexű csúcsok halmaza. Tehát nem csak Gallai, hanem König tételeit is alkalmazhatjuk. 3 pont

G -ben azok a $v_i v_j$ élek, amelyekre $i + j = 101$, éppen egy teljes párosítást alkotnak, ezért $\nu(G) = 50$. (Ez 50 független él, több meg nem fér el.) 4 pont

Viszont Gallai tétele szerint $\nu + \rho = 100$, tehát $\rho = 50$. 1 pont

König tétele szerint $\nu = \tau$, tehát $\tau = 50$. 1 pont

Végül Gallai másik tétele szerint $\tau + \alpha = 100$ tehát $\alpha = 50$. (Vagy König másik tétele szerint $\rho = \alpha$ tehát $\alpha = 50$.) 1 pont

3. A G (nem feltétlenül páros) gráfnak 10 csúcsa van és $\nu(G) = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

Legyenek a csúcsok v_1, v_2, \dots, v_{10} és tegyük fel, hogy $v_1 v_2$ és $v_3 v_4$ két független él. Mivel $\nu = 2$, a v_5, \dots, v_{10} csúcsok között nem futhat él (kapnánk egy harmadik független élt). 4 pont

Tehát kiszínezhetjük a v_5, \dots, v_{10} csúcsokat ugyanazzal a színnel. 3 pont

A v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsokat pedig színezzük ki négy további színnel. Ezzel G jó színezését kaptuk 5 színnel, tehát $\chi(G) \leq 5$. 3 pont

4. A G egyszerű gráf minden csúcsának a foka 6, kivéve egy csúcsot, aminek 2. Bizonyítsuk be, hogy $\chi'(G) = 7$.

Legyen a kivételes (2 fokú) csúcs x . Mivel $\Delta(G) = 6$, a Vizing tétel szerint $\chi'(G) = 6$ vagy 7. 2 pont

Tegyük fel, hogy sikerült kiszínezni az éleket 6 színnel (1, 2, 3, 4, 5, 6). Ekkor x kivételével minden csúcsra mindegyik színű él csatlakozik. 2 pont

Tegyük fel, hogy az x -re csatlakozó két él színe 1 és 2. Figyeljük az 1 színű éleket. Mivel az összes csúcsra illeszkedik 1 színű él, mégpedig mindegyikre pontosan egy, az 1 színű élek egy teljes párosítást alkotnak. Tehát G -nek páros sok csúcsa van. 2 pont

Most pedig figyeljük a 3 színű éleket. Mivel az összes csúcsra illeszkedik (pontosan egy) 3 színű él, kivéve x -re, a 3 színű élek egy párosítást alkotnak, amiből csak x marad ki. Tehát G -nek páratlan sok csúcsa van. 2 pont

Ez ellentmondás, tehát $\chi'(G) > 6$ vagyis $\chi'(G) = 7$. 2 pont

5. A G egyszerű páros gráf két osztálya A és B , A csúcsai v_1, v_2, \dots, v_n , minden i -re v_i foka $d(v_i) \geq i^2$. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van A -t lefedő párosítás.

Belátjuk, hogy teljesül a Hall feltétel, vagyis minden $X \subseteq A$ -ra $|N(X)| \geq |X|$. 3 pont

Legyen $X \subseteq A$, $|X| = k$. Ekkor van olyan $i \geq k$, amelyre $v_i \in X$. 4 pont

Ekkor viszont $|N(X)| \geq d(v_i) \geq i^2 \geq i \geq k = |X|$. Ezzel beláttuk, hogy teljesül a Hall feltétel, tehát van A -t lefedő párosítás. 3 pont

6. A G gráfból akármelyik élt elhagyva síkgráfot kapunk. a. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$. b. Mutassunk ilyen G gráfot, amelyre $\chi(G) = 5$.

a. Hagyjuk el G -ből az uv élt. A kapott G' gráf síkgráf, tehát a Négyszíntétel szerint ki lehet színezni négy színnel. 4 pont

Most tegyük vissza az uv élt, és színezzük át u -t egy ötödik színre. Ez egy jó színezése G -nek, tehát $\chi(G) \leq 5$. 4 pont

b. A K_5 ilyen gráf, könnyen ellenőrizhető. 2 pont

(Azt már nehezebb látni, hogy a K_5 az egyetlen ilyen gráf, de ez nem is kellett.)