Kombinatorika és gráfelmélet I

1. PótZH, 2019. május 17. 10.15-11.45, T 604

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon, amelynek az a vicces tulajdonsága van, hogy ha elvesszük belőle a v_1 csúcsot, akkor pontosan 3 komponensre esik szét?

Ez pontosan akkor következik be, ha v_1 foka, $d_1 = 3$. 3 pont

De akkor az 1 pontosan kétszer szerepel a fa Prüfer kódjában. 3 pont

Elég tehát az ilyen Prüfer kódokat megszámolni. A kód 8 hosszú, a két 1-es helyét $\binom{8}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, a többi 6 hely mindegyikére 9-féle számot írhatunk. Tehát a válasz $\binom{8}{2}9^6$. 4 pont

2. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{2019}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 3$ vagy 2016. Van G-ben Euler kör?

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler kör, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros. 3 pont

Viszont ez a gráf nem összefüggő! A gráf 3 darab, egyenként 673 csúcsú kör diszjunkt uniója. (A három kör csúcsai a mod 3 kongruens sorszámú csúcsok.) Ezért G-ben nincs Euler kör. 7 pont

3. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_6$ és u_1, u_2, u_3, u_4. Minden v_i és u_j össze van kötve, más él nincs. (Vagyis G a $K_{6,4}$ teljes páros gráf.) Minimálisan hány élt kell hozzáadni G-hez, hogy tartalmazzon Hamilton kört?

Ha egy gráfban van Hamilton kör, akkor akárhogyan elveszünk k pontot, a gráf legfeljebb k komponensre esik szét. 2 pont

Itt az u_1, u_2, u_3, u_4 csúcsokat elhagyva 6 izolált pontunk lesz, tehát G-ben nincs Hamilton kör. 2 pont

Ha egy élt behúzunk, azzal legfeljebb eggyel tudjuk csökkenteni a komponensek számát, amit u_1, u_2, u_3, u_4 elhagyásával kapunk, tehát még mindig nem lesz Hamilton kör. 2 pont

Két élt ügyesen hozzáadva viszont már lesz: adjuk hozzá a v_1v_2 és v_2v_3 éleket. Ekkor $v_1v_2v_3u_1v_4u_2v_5u_3v_6u_4v_1$ egy Hamilton kör a kapott gráfban. 4 pont

4. A K_{100} teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, a v_iv_j él súlya 1, ha i és j is páros, 2, ha i és j is páratlan, és 3000 ha i és j közül az egyik páros, a másik páratlan. Hány minimális összsúlyú feszítőfája van G-nek?

1. megoldás:

A mohó algoritmus az összes minimális feszítőfát megtalálja, úgyhogy kövessük a mohó algoritmust. 1 pont

Ez először kiválaszt egy tetszőleges feszítőfát a páros sorszámú csúcsokon, utána egy tetszőleges feszítőfát a páratlan sorszámú csúcsokon, végül behúz egy tetszőleges élt a két fa közé. 5 pont

A Cayley tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy ilyen fából összesen $50^{48} \cdot 50^{48} \cdot 50^2 = 50^{98}$ darab van. 4 pont

2. megoldás:

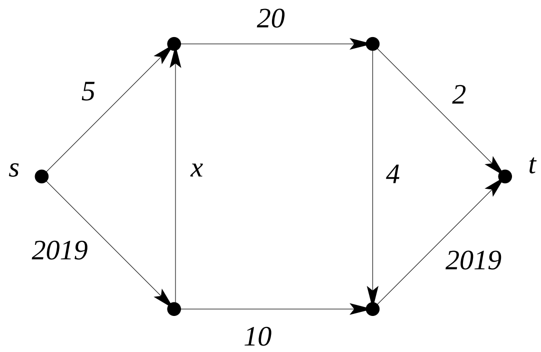
A mohó algoritmus megtalálja az egyik minimális feszítőfát, úgyhogy kövessük a mohó algoritmust. 1 pont

Ez először kiválaszt egy feszítőfát a páros sorszámú csúcsokon, utána egy feszítőfát a páratlan sorszámú csúcsokon, végül behúz egy élt a két fa közé. Ennek a minimális feszítőfának a súlya $49 \cdot 1 + 49 \cdot 2 + 3000 = 3147$. 3 pont

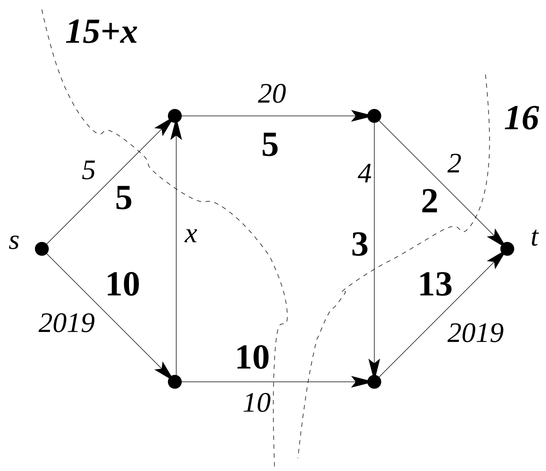
Az állítjuk, hogy a minimális feszítőfák pontosan az ilyen fák: Egy tetszőleges feszítőfa a páros sorszámú csúcsokon, egy tetszőleges feszítőfa a páratlan sorszámú csúcsokon, és köztük egy tetszőleges él. Az világos, hogy ezek mind minimális feszítőfák, hiszen feszítőfák és a súlyuk 3147. Most tekintsünk egy minimális feszítőfát. Ennek kell, hogy legyen éle, ami a páros és páratlan sorszámú csúcsokat köti össze. Kettő nem lehet, mert akkor már legalább 6000 lenne a súlya. Ekkor viszont külön a páros és külön a páratlan sorszámú csúcsokon is tartalmaz egy feszítőfát. 3 pont

A Cayley tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy ilyen fából összesen $50^{48} \cdot 50^{48} \cdot 50^2 = 50^{98}$ darab van. 3 pont

5. Tetszőleges $x \geq 0$ számra legyen $m(x)$ az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága. Határozzuk meg az $m(x)$ függvényt.



A hálózatban a minimális x-et tartalmazó vágás kapacitása $15 + x$ (ábra). 4 pont
(Ezt meg lehet találni javító utas módszerrel, vagy egyszerű esetszétválasztással.)
A minimális x-et nem tartalmazó vágás kapacitása pedig 16 (ábra). 4 pont
(Ezt is meg lehet találni javító utas módszerrel, vagy egyszerű esetszétválasztással.)
Tehát a Ford-Fulkerson tétel alapján $m(x) = \min\{15 + x, 16\}$. 2 pont



6. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, v_i és v_j össze van kötve, akkor és csak akkor, ha $|i - j| = 1$ vagy 7. Határozzuk meg G pontösszefüggőségi számát, $\kappa(G)$-t.

A v_2 és v_8 csúcsokat elhagyva a v_1 izolált ponttá válik, tehát $\kappa(G) \leq 2$. 4 pont

Most hagyjunk el egy pontot. Ez a pont két intervallumra vágja a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokat. (A szokásos sorrendben nézve a csúcsokat.) Mindkét intervallumon végig tudunk menni az 1 hosszú élekkel, és össze tudjuk őket kötni egy 7 hosszú éllel. 5 pont

Tehát $\kappa(G) = 2$.