

Kombinatorika és gráfelmélet I
1. ZH, 2019. április 2. 14.15-15.45, E 505
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a v_1, v_2, \dots, v_{10} csúcsokon, amelynek van 5-fokú csúcsa?

Legyen F_k azon fák halmaza, amelyben a v_k foka 5. A kérdés tehát $|\cup_{i=1}^{10} F_i|$. 2 pont

A 10 csúcsú fák Prüfer kódja 8 hosszú és minden csúcs indexe eggyel kevesebbszer szerepel, mint a sorszáma. Ezért egy 5-fokú csúcs 4-szer szerepel. Tehát vagy *pontosan* egy, vagy *pontosan* két 5-fokú csúcs lehet. 2 pont

Ezért a szita formula alapján $|\cup_{i=1}^{10} F_i| = \sum_{i=1}^{10} |F_i| - \sum_{i \neq j} |F_i \cap F_j|$. (Vagy a józan ész alapján: $\sum_{i=1}^{10} |F_i|$ egyszer számolja az olyan fákat, amelyben egy 5-fokú csúcs van, és kétszer azokat, amiben két 5-fokú csúcs van, ezért az ilyeneket egyszer le kell vonni) 2 pont

A Prüfer kód alapján minden i -re $|F_i| = \binom{8}{4} \cdot 9^4$, és minden $i \neq j$ -re $|F_i \cap F_j| = \binom{8}{4}$. 2 pont

Tehát a válasz $10 \cdot \binom{8}{4} \cdot 9^4 - \binom{10}{2} \binom{8}{4}$. 2 pont

Ez egyébként 456120.

2. Határozzuk meg azokat az 1000 csúcsú egyszerű G gráfokat, amelyekre a következő teljesül: akárhogyan veszünk hozzá egy élt G -hez, ha a kapott G' gráf egyszerű, akkor van Euler köre (körösétája).

Mindenesetre a teljes gráf kielégíti a feltételt, mert ehhez egyáltalán nem tudunk úgy hozzávenni egy élt, hogy a kapott gráf egyszerű legyen. 2 pont

Tegyük fel, hogy G nem teljes és kielégíti a feltételt. Legyen u és v két nem szomszédos csúcs. Ekkor $G + \{uv\}$ gráfnak van Euler köre. Ennek alapján G -ben u és v foka páratlan, a többi csúcs foka páros. 2 pont

Legyen w egy u -től és v -től különböző csúcs. Mivel w páros fokú, nem lehet az összes többi, 999 csúccsal összekötve. Legyen z egy olyan csúcs, ami nem szomszédos w -vel. 3 pont

Ekkor viszont a $G + \{wz\}$ gráfban w foka páratlan, tehát nincs Euler köre, ami ellentmondás. Tehát az egyetlen gráf, amely kielégíti a feltételt, a teljes gráf. 3 pont

3. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{2019}$, minden csúcs foka legalább 1848. A H gráf csúcsai ugyancsak $v_1, v_2, \dots, v_{2019}$, minden csúcs foka legalább 1956.

A $G \cap H$ gráf csúcsai ugyanezek, $v_1, v_2, \dots, v_{2019}$, két csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze, ha G -ben is és H -ban is össze vannak kötve. Bizonyítsuk be, hogy a $G \cap H$ gráfnak van Hamilton köre.

Legyen v egy tetszőleges csúcs. G -ben a foka legalább 1848, tehát *legfeljebb* $2018 - 1848 = 170$ másik csúccsal nincs összekötve. 2 pont

Hasonlóan, v foka H -ban legalább 1956, tehát *legfeljebb* $2018 - 1956 = 62$ másik csúccsal nincs összekötve. 2 pont

Ezért a $G \cap H$ gráfban v legfeljebb $160 + 62 = 222$ másik csúccsal nincs összekötve, vagyis a fokszáma legalább $2018 - 222 = 1786$. 3 pont

Mivel $1786 > 2018/2$, a Dirac tétel alapján bizony van a $G \cap H$ gráfban Hamilton kör. 3 pont

4. A K_{100} teljes gráf csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{100} , a $v_i v_j$ él súlya 1, ha ij páros és x , ha ij páratlan. Adjuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa súlyát x függvényében.

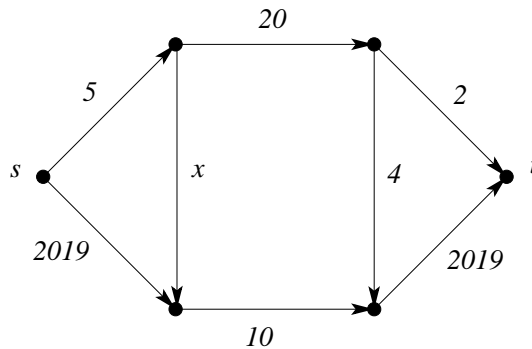
Legyen V a páros indexű csúcsok halmaza, U a páratlan indexűeké. Nyilván $|V| = |U| = 50$. A feltételek alapján az U -n belüli élek súlya x , az összes többi él súlya 1. A Kruskal tetel szerint a mohó algoritmus egy minimális feszítőfát talál, tehát futtassuk le a mohó algoritmust. 1 pont

Először legyen $x \leq 1$. Ekkor először megkapjuk ($x = 1$ esetén megkapHATjuk) U egy feszítőfáját, amelynek 49 éle van, mind x súlyú, majd ezt kiegészítjük V feszítőfájává, 50 darab 1 súlyú éllel. Ennek a súlya $49x + 50$. 4 pont

Ha $x \geq 1$, akkor viszont csupa 1 súlyú élből fogunk kapni egy feszítőfát. Ennek a súlya 99. 4 pont

Tehát a minimális feszítőfa súlya $49x + 50$ ha $x \leq 1$ és 99 ha $x \geq 1$. 1 pont

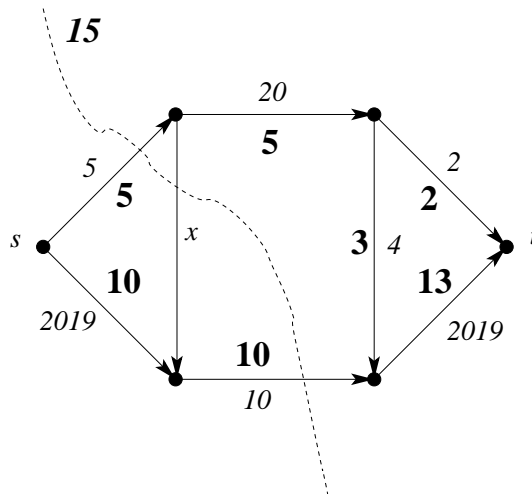
5. Tetszőleges $x \geq 0$ számra legyen $m(x)$ az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága. Határozzuk meg az $m(x)$ függvényt.



A hálózatban található egy 15 kapacitású vágás (ábra). 4 pont

Ugyanakkor tetszőleges x esetén van 15 nagyságú folyam (ábra). 4 pont

Tehát $m(x) = 15$ minden x -re. 2 pont



6. G csúcsai $u_{i,j}$, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 2$. Az $u_{i,j}$ és $u_{k,l}$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - k| = 0, 1$, vagy 4. Határozzuk meg G pontösszefüggőségi számát, $\kappa(G)$ -t.

Minden $1 \leq i \leq 5$ -re nevezzük az $u_{i,1}$ és $u_{i,2}$ csúcsokat ikereknek. Ha elhagyunk két nem szomszédos ikerpárt, például az $u_{1,1}$ és $u_{1,2}$, $u_{3,1}$ és $u_{3,2}$ csúcsokat, akkor a gráf két részre esik szét. Tehát $\kappa(G) \leq 4$. 4 pont

Ugyanakkor, ha csak három csúcsot hagyunk el, akkor legfeljebb egy ikerpárt hagyunk el, legalább négy ikerpárból maradt legalább egy-egy csúcs. Ezek a csúcsok egy 4 hosszú utat alkotnak, amelyhez az összes többi megmaradt csúcs csatlakozik egy-egy éllel. Tehát a kapott gráf összefüggő marad. 5 pont

Tehát $\kappa(G) = 4$. 1 pont