Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2019. április 26.

Élszínezés, ismétlés

$L(G)$: G élgráfja, csúcsai G éleinek felelnek meg, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő éleknek G-ben van közös végpontja.

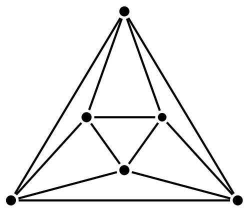
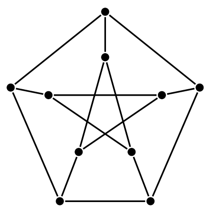
$\chi'(G) = \chi_e(G)$: G élkromatikus száma, G éleinek a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két közös végpontú él különböző színű.) Nyilván $\chi'(G) = \chi_e(G) = \chi(L(G))$.

Minden G gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing tétel: Minden G egyszerű gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig tétel: Ha G páros gráf, akkor $\Delta(G) = \chi'(G)$.

1. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.
2. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.
4. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.
5. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
6. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?

7. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
8. Igazoljuk, hogy ha a G gráf 2019-pontú és 32-összefüggő, akkor G bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 64 élű út.
9. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-öf!
10. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?
11. Egy 100 csúcsú egyszerű G gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.
12. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
13. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
14. Mutassuk meg, hogy minden G gráfra, ha a mohó színezést megfelelő csúcs-sorrendben végezzük, akkor optimális színezést ad, azaz $\chi(G)$ színnel színezi ki G-t.
15. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésében bármely színosztálynak van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.
16. Legyenek a G (végtelen) gráf csúcsai a sík pontjai, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha egységtávolságot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy $4 \leq \chi(G) \leq 7$.

    $\chi(G)$ meghatározása a híres Hadwiger-Nelson probléma, $\chi(G)$-t szokás a sík kromatikus számának is hívni. A legjobb ismert korlátok: $5 \leq \chi(G) \leq 7$.

Házi feladatok

1. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

2. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.