

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2019. április 12.

## Csúcsszínezés

$\chi(G)$ :  $G$  kromatikus száma,  $G$  csúcsainak a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két összekötött pont különböző színű.)

$\Delta(G)$ : maximális fokszám  $G$ -ben.  $\omega(G)$ :  $G$  klikkszáma, a legnagyobb teljes részgráf mérete.

Minden  $G$  gráfra  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Brooks tétel:** Ha  $G$  összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

**gyenge Brooks tétel:** Ha  $G$  összefüggő és nem reguláris, akkor  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

Minden pozitív egész  $k$  ra létezik olyan  $G_k$  gráf, melyre  $\omega(G_k) = 2$ , és  $\chi(G_k) = k$ .

**Zykov konstrukció:** Legyen  $Z_2$  a teljes két csúcsú gráf. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a  $Z_k$  gráfot. Legyen  $Z_{k+1}$  a következő gráf. Vegyük  $Z_k$   $k$  darab diszjunkt példányát. Ezek után minden lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot mindegyik példányból, vegyünk fel ehhez a  $k$ -ashoz egy új csúcsot, és kössük össze a  $k$ -as elemeivel. Ekkor minden  $k$ -ra  $\omega(Z_k) = 2$  és  $\chi(Z_k) = k$ .

**Shift gráf:** Legyen  $m > 1$  rögzített. Legyenek  $S_m$  csúcsai az  $(i, j)$  számpárok, ahol  $1 \leq i < j \leq m$ . Két csúcs,  $(i, j)$  és  $(a, b)$  össze van kötve  $G$ -ben akkor és csak akkor, ha  $j = a$  vagy  $i = b$ . Ekkor minden  $m$ -re  $\omega(S_m) = 2$  és  $\chi(S_m) \geq \log_2 m$ .

1. Van-e a  $Z_k$  Zykov gráfnak Hamilton-köre?
2. (Mycielski konstrukció) Legyen  $M_2 = K_2$ . Tegyük fel, hogy  $k \geq 2$  és már meghatároztuk az  $M_k$  Mycielski gráfot. Legyenek  $M_k$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . Az  $M_{k+1}$  gráf csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_m$  és  $w$ . A  $v_1, v_2, \dots, v_m$  csúcsok éppen az  $M_k$  Mycielski gráfot feszítik, az  $u_1, u_2, \dots, u_m$  csúcsok között nincs él, egy  $u_i$  és egy  $v_j$  csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve. Végül pedig  $w$ -t kössük össze az  $u_1, u_2, \dots, u_m$  csúcsokkal. Így kaptuk az  $M_k$  Mycielski gráfot.
  - a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $k$ -ra  $\omega(M_k) = 2$ , vagyis  $M_k$  nem tartalmaz háromszöget.
  - b. Bizonyítsuk be, hogy minden  $k$ -ra  $\chi(M_k) = k$ .
3. A Mycielski konstrukcióval megkapott  $G_k$  gráfok közül melyek tartalmazznak Euler-körsétát, és melyeknek van Hamilton-körük?
4. Van-e az  $\binom{m}{2}$  pontú  $S_m$  shiftgráfnak Euler-körsétája?
5. (\*) Tegyük fel, hogy az  $n$  csúcsú  $G$  gráf egyértelműen 3-színezhető, azaz bármely két 3-színezésében ugyanazok a színosztályok. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -nek legalább  $2n - 3$  éle van.
6. Legyenek  $G$  csúcsai az  $1, 2, \dots, 2^n - 1$  számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a  $G$  gráf kromatikus száma?
7. Legyen  $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , és legyen  $ij \in E(G)$ , ha  $|i - j| \leq 7$ . Mennyi az így meghatározott  $G$  gráf  $\chi(G)$  kromatikus száma?
8. Legyenek a  $G$  gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a  $G$  gráf kromatikus száma?
9. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a  $G$  gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy  $\chi(G) \leq 3$ .
10. Mutassunk olyan  $G$  gráfot, aminek nincs  $K_4$  részgráfja, de  $G$  mégsem színezhető ki 3 színnel.
11. Mutassuk meg, hogy minden  $G$  gráfra, ha a mohó színezést megfelelő csúcs-sorrendben végezzük, akkor optimális színezést ad, azaz  $\chi(G)$  színnel színezi ki  $G$ -t.
12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $G$  gráf  $\chi(G)$  színnel történő tetszőleges színezésében bármely színosztálynak van olyan  $v$  csúcsa, hogy  $v$ -nek minden más színosztályban van szomszédja.

13. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan  $G$  gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz  $\chi(G)$  élű irányított utat.
14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $G$  gráfra  $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .
15. Legyenek  $K$  és  $H$  a  $G$  gráf két komponense. Legyen  $G'$  az a gráf, amit  $G$ -ből úgy kapunk, hogy  $K$  minden pontját összekötjük  $H$  minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$  ill.  $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$ .
16. Legyenek  $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$  tetszőleges véges gráfok és legyen  $G = (V, E_1 \cup E_2)$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$ .
17. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $n$  csúcsú, egyszerű  $G$  gráfra  $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$  teljesül. Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ . (\*)
18. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
19. Tekintsük a sík egyenesének egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
20. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetőek úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
21. Legyenek a  $G$  (végtelen) gráf csúcsai a sík pontjai, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha egységtávolságot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy  $4 \leq \chi(G) \leq 7$ .

$\chi(G)$  meghatározása a híres Hadwiger-Nelson probléma,  $\chi(G)$ -t szokás a sík kromatikus számának is hívni. A legjobb ismert korlátok:  $5 \leq \chi(G) \leq 7$ .

#### Házi feladatok

1. Határozzuk meg az olyan  $n$  csúcsú  $G$  gráfok élszámának a maximumát, amelyekre  $\chi(G) \leq 3$ .
2. Igaz-e, hogy minden egyszerű  $G$  gráfnak van olyan színezése  $\chi(G)$  színnel, amelyre valamelyik színosztály  $\alpha(G)$  csúcsot tartalmaz?