Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2019. március 29.

Magasabb összefüggőség, Menger, összefoglalás

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Tetszőleges $1 < \kappa < \lambda$ pozitív egészekre konstruáljunk G gráfot, amire $\lambda(G) = \lambda$ és $\kappa(G) = \kappa$.
3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\lambda(K_n)$ ill. $\kappa(K_n)$ élösszefüggőségi ill. pontösszefüggőségi számát. Ugyanez a kérdés a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra.
4. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy $\kappa(G) = 3$.
5. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n csúcsú k-összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges r-reguláris ($r > 1$) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő!
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges gráf esetén $\delta(G) \geq \lambda(G) \geq \kappa(G)$ teljesül. ($\delta(G)$ G-ben a legkisebb fokszám.)
9. Mutassuk meg, hogy ha a G egyszerű gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha bármely két csúcsára található olyan kör G-ben, amely ezen csúcsokat tartalmazza. Igazoljuk, hogy ha egy izolált pontot nem tartalmazó, egyszerű G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két élén keresztül vezet G-nek köre.
10. Tegyük fel, hogy a G gráf k-összefüggő. Vegyünk fel egy új x pontot, és kössük össze G k különböző pontjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf is k-összefüggő!
11. Igazoljuk Dirac tételét: ha $\kappa(G) \geq k \geq 2$, akkor G bármely k pontjához található G-nek olyan köre, amely mind a k pontot tartalmazza.
12. Mutassuk meg, hogy a 2-összefüggő ill. 2-élösszefüggő gráfoknak van fülfelbontása. Azaz, a 2-öf gráfok pontosan azok, amelyek felépíthetők egyetlen csúcsból fülek egymás utáni hozzáadásával. Itt minden fül a már felépített félkész gráf két különböző csúcsa közti olyan út, amelynek belső csúcsai nem szerepelnek az eddig felépített gráfban. A 2-élöf gráfok fülfelbontására hasonló igaz, megengedve, hogy egy fülnek a két vége ugyanaz a csúcs legyen. (Irányított gráfokra hogyan terjeszthetők ki ezek az állítások?)
13. Igazoljuk, hogy tetszőlges G véges, irányítatlan gráfnak pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása (azaz olyan, amelyre bármely két csúcs között mindkét irányba van irányított út), ha G kéteszeresen élösszefüggő.
14. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.
15. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok, és $V(G) = A \cup B \cup C$ a G gráf csúcshalmaza, valamint legyen $uv \in E(G)$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora $\kappa(G)$?
16. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.
17. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
18. Igazoljuk, hogy ha a G gráf 2019-pontú és 32-összefüggő, akkor G bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 64 élű út.
19. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-öf!

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)

2. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, ill. 7?

1. Aláíráspótló ZH, 2017. május 16, 8.15-9.45, T 601/2

1. Hány olyan fa van a $v_1, \ldots, v_8$ csúcsokon, amelyben $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = d_5 + d_6 + d_7 + d_8$? ($d_i$ a v_i csúcs fokszáma a fában)

2. A G 8 csúcsú gráf csúcsai $v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3, u_4$. Minden i, j-re v_i össze van kötve u_j-vel, más él nincs. (Vagyis G egy $K_{4,4}$ teljes páros gráf.) Maximálisan hány élt vehetünk hozzá G-hez úgy, hogy a kapott G' gráf egyszerű legyen és G' tartalmazzon Euler kört?

3. A G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$, a $v_i v_j$ él ($i \neq j$) súlya $i + j$. Határozzuk meg G minimális összsúlyú feszítőfájának a súlyát.

4. Határozzuk meg, hogy a $K_{4,4}$ teljes páros gráf (lásd 2. feladat) hány Hamilton kört tartalmaz. (Két Hamilton kör különböző, ha nem pontosan ugyanazokból az élekből állnak.)

5. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagysága 100. Ha *bármelyik* él kapacitásához hozzáadunk 1-et, az új hálózatban a maximális folyam nagysága 101. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti (G, s, t, c) hálózatban az összes él kapacitásának összege 100.

6. Határozzuk meg az 5 csúcsú egyszerű G gráfok élszámának a minimumát, amelyekre $\kappa(G) = 2$. ($\kappa(G)$ G pontösszefüggőségi száma.)