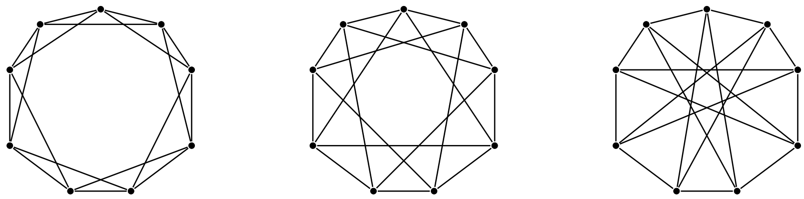
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

3. gyakorlat, 2019. február 22.

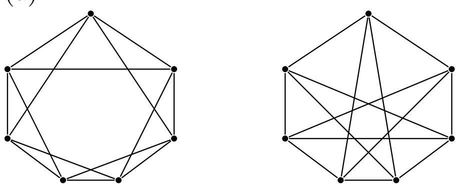
Prüfer-kód, minimális súlyú feszítőfa

1. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?

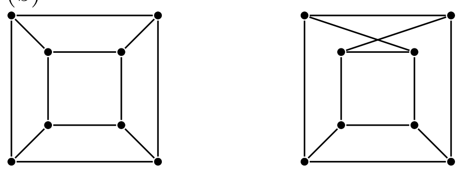


2. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?

(a)



(b)



3. Egy 3×3 méretű sakktábla négy sarkába két világos és két sötét huszárt állítunk úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes sarokban álljanak. Elérhető-e ebből az állapotból a huszárokkal a szokásos lépéseket végezve, hogy a tábla négy sarkában álljanak a huszárok, de az átellenesek különböző színűek legyenek? (Közben sosem állhat egy mezőn egynél több figura.)
4. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)
5. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.
6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.
7. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
8. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)
9. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?
10. A $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n-2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?
11. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \dots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartamazza?
12. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy $d_1, d_2, \dots, d_n$ egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.
13. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.
14. Bizonyítsuk be, hogy egy fában *az összes* leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*)
15. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.
16. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)

17. Adjunk meg tetszőleges k-hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.
18. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
19. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
20. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
21. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
22. Ha egy súlyozott élű gráfban vannak egyforma súlyú élek, akkor elképzelhető, hogy a mohó algoritmus tobbféleképpen is lefuthat. Bizonyítsuk be, hogy *minden* minimális összsúlyú feszítőfa megkapható a mohó algoritmus megfelelő futtatásával.

Házi feladat

1. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.

2. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?

   Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?