Kombinatorika és gráfelmélet 1.

10. gyakorlat, 2019. május 3.

Síkgráfok

Tudnivalók:

G síkgráf, ha lerajzolható a síkra metszés nélkül. Tegyük fel, hogy G le van rajzolva a síkra metszés nélkül, n csúcs, e él, t tartomány, k összefüggő komponens. **Euler formula:** $n - e + t = k + 1$.

Következmény: Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú páros síkgráf, akkor $e \leq 2n - 4$. Sőt, ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, amelyben nincs háromszög, már akkor is $e \leq 2n - 4$.

Következmény következménye: K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Négyszíntétel (Appel-Haken 1976) Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 4$. (Ez nem javítható, pl K_4.)

Topologikus izomorfia. Definiálunk két operációt, amelyek egymás inverzei. 1. operáció: A G gráf két szomszédos csúcsa legyen u és v, töröljük el az uv élt és vezessünk be egy új x csúcsot, amelynek két szomszédja van, u és v. 2. operáció: Tegyük fel, hogy G-ben x foka 2, szomszédai u és v. Töröljük el az x csúcsot és az xu, xv éleket, viszont húzzuk be az uv élt.

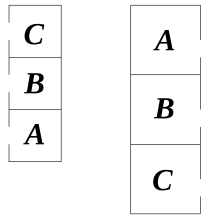
A G és H gráfok topologikusan izomorfak, ha az 1. és 2. operáció ismételt alkalmazásával el lehet jutni G-ből H-ba.

Észrevétel: Tegyük fel, hogy G és H gráfok topologikusan izomorfak. Ekkor G síkgráf $\Leftrightarrow$ H síkgráf.

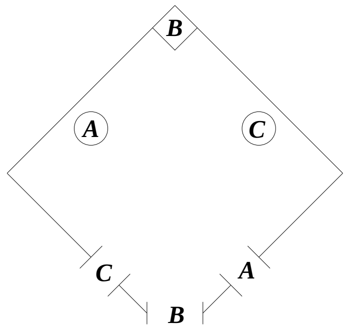
Kuratovski tétel (1930) G akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz K_5-tel és $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

Fáry-Wagner tétel (1936, 1948) Ha G síkgráf, akkor lerajzolható metszés nélkül úgy, hogy az élei egyenes szakaszok.

1. Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.
2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?
3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.
4. Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
   a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
   b) ha G-nek $3n - 6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
   c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
   d) G-nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
5. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
6. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és $\overline{G}$ egyike biztosan nem síkgráf.
7. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
8. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
9. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
10. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g, akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.
11. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?

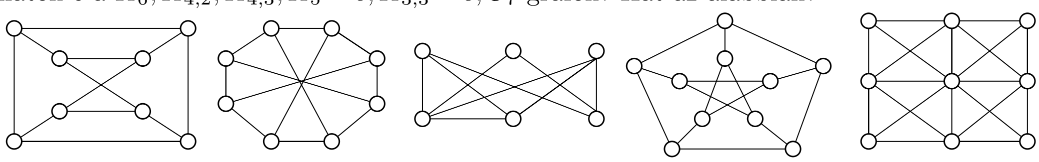


1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

12. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e, \overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?



13. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
    a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
    b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
14. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
15. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezések lehetséges minimális számát. (Feltesszük, hogy három él nem metszheti egymást ugyanabban a pontban.) Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke? Mennyi $cr(K_6)$?
16. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.
17. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G-be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
18. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
19. (Hanani-Tutte tétel) (*) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!
20. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

    Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakastól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

    b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?

21. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

Házi feladat.

1. Legyen G három síkgráf uniója. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 18$.

2. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G)+2e(G)-t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2016 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

2. Aláíráspótló ZH, 2014. december 17. 8.15-9.45, IB 134

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\kappa(G)$: pontösszefüggőségi szám, $\lambda(G)$: élösszefüggőségi szám.

Definíció. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, $k > 0$ egész. A kG gráf csúcsai v_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, a v_{ij} és $v_{i'j'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve éllel kG-ben, ha $i = i'$, vagy ha v_i és $v_{i'}$ össze vannak kötve G-ben. Vagyis úgy kapjuk a kG gráfot G-ből, hogy G minden csúcsát helyettesítjük k csúccsal, két új csúcs akkor és csak akkor van összekötve kG-ben, ha ugyanabból a G-beli csúcsból származnak, vagy ha a megfelelő két G-beli csúcs össze volt kötve G-ben.

1. Legyen G egy egyszerű gráf, Tegyük fel, hogy $\kappa(G)$, G pontösszefüggőségi száma 3. Bizonyítsuk be, hogy $\kappa(3G) = 9$.

2. Legyen $G = C_7$, a 7 hosszú kör. Bizonyítsuk be, hogy $7 \leq \chi(3G) \leq 8$.

3. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfra $\nu(G) = 3$ és $\chi(G) = 7$. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(G) \geq 6$.

4. Legyen G egy páros gráf A, B osztályokkal. Tegyük fel, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X| - 1$. ($N(X)$ az X-hez tartozó csúcsok szomszédainak halmaza) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van olyan párosítás, amely A-t egy csúcs kivételével lefedi.

5. A G gráfról tudjuk, hogy élösszefüggőségi száma, $\lambda(G) = 2$. Ha a v csúcsot elhagyjuk G-ből, akkor a kapott $G \setminus \{v\}$ gráf pontosan három összefüggő komponensből áll. Bizonyítsuk be, hogy v foka, $d_v \geq 6$.

6. A G egyszerű gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots v_{15}$ és $u_1, u_2, \ldots, u_{15}$. A v_i és u_j pontok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha ij osztható 4-gyel. Más él nincs. Határozzuk meg $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.

2. Aláíráspótló ZH, 2016. május 25, 8.15-9.45, QBF 10

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\Delta(G)$: maximális fokszám.

1. Az 1000 csúcsú G gráfra $\alpha(G) \leq 100$. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \geq 9$.

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, v_i és v_j pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1, 4, 5$. Határozzuk meg $\chi(G)$-t.

3. Határozzuk meg az olyan 100 csúcsú G páros gráfok maximális élszámát, amelyeknek mindkét osztályában 50 csúcs van, és $\nu(G) = 4$.

4. G egy egyszerű páros gráf A és B osztályokkal. A csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, v_i fokszáma d_i. B csúcsai $u_1, \ldots, u_m$, u_i fokszáma d'_i. Tudjuk, hogy minden i, j-re $d_i + d'_j \geq i + j$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz vagy A-t vagy B-t lefedő párosítást.

5. Legyen G egy e élű síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy legalább $e/6$ élű páros gráfot!
(Igazából $e/2$-vel is igaz, ráadásul minden gráfra, nem csak síkgráfra!)

6. Határozzuk meg a 6 élű, *nem feltétlenül összefüggő*, (akárhány csúcsú), egyszerű síkbarajzolt G gráfok tartományainak, $t(G)$-nek a lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.