Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PótZH, 2018. május 17, 12.15-13.45, T 604

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{60}$, v_i és v_j $(i \neq j)$ akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha ij osztható 6-tal. Van G-ben teljes párosítás?

Bontsuk 3 osztályra a csúcsokat. $V_1 = \{v_i | i \text{ 1 vagy 5 maradékot ad 6-tal osztva}\}$, $V_2 = \{v_i | i \text{ 6-tal osztható}\}$, $V_3 = \{v_i | i \text{ 2, 3 vagy 4 maradékot ad 6-tal osztva}\}$. 2 pont

Világos, hogy V_1 csúcsai között illetve V_1 és V_3 között nem fut él. 3 pont

Tehát ha lenne G-ben teljes párosítás, akkor V_1 minden csúcsának egy V_2-beli csúcs lenne a párja. 3 pont

Csakhogy ez lehetetlen, mert $|V_1| = 40$, $|V_2| = 20$. Tehát nincs G-ben teljes párosítás. 2 pont

2. a Adjunk meg olyan 100 csúcsú G gráfot, amelyre $\chi(G) = 6$ és $\nu(G) = 3$.
b. A G gráfra $\chi(G) = 6$. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq 3$.

A K_6 (teljes hatos) majdnem jó: természetesen $\chi(K_6) = 6$, van 3 független él, de több nem fér el. Adjunk még hozza 94 izolált pontot, a kapott gráf kielégíti a feltételeket. 3 pont

Most tegyük fel, hogy egy G gráfra $\nu(G) \leq 2$. Vegyünk egy maximális független élhalmazt. Ez 0, 1, vagy 2 él, tehát összesen 0, 2, vagy 4 végpontjuk van. Az ezeken kívüli, legalább 96 pont független (különben nem lett volna az élhalmazunk maximális független). 2 pont

Ekkor viszont ezeket a pontokat kiszínezhetjuk egyforma színűre, a fennmaradó 0, 2, vagy 4 pontot pedig színezzük csupa különböző színnel. 3 pont

Ez G-nek egy jó színezése, legfeljebb 5 színnel, tehát $\chi(G) \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezért ha $\chi(G) = 6$, akkor $\nu(G) \geq 3$. 2 pont

3. A G egyszerű összefüggő gráfban minden csúcs foka 5, kivéve három csúcsot, amelyeknek 1. Ennek a három csúcsnak viszont ugyanaz a csúcs a szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy $\chi'(G) = 6$.

Legyenek v_1, v_2, v_3 az 1-fokú csúcsok, u a közös szomszédjuk.

Mivel $\Delta(G) = 5$, a Vizing tétel szerint $5 \leq \chi'(G) \leq 6$. 2 pont

Tegyük fel, hogy $\chi'(G) = 5$. Vegyük a G éleinek egy 5-színezését. Itt nyilván a v_1u, v_2u, v_3u élek különböző színűek.

Legyen a v_1u él színe piros és legyen a kék egy olyan szín, amely nem szerepel a v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3 élek színei között. 1 pont

Ekkor v_1, v_2, v_3 kivételével minden csúcsra mind az 5 színű élből illeszkedik pontosan 1. Tehát a kék élek egy párosítást alkotnak, amiből csak a v_1, v_2, v_3 csúcsok maradnak ki. Ebből következik, hogy G-nek *páratlan* sok csúcsa van. 3 pont

Most pedig tekintsük a piros éleket, ezek is egy párosítást alkotnak, amiből csak a v_2, v_3 csúcsok maradnak ki. Ebből következik, hogy G-nek *páros* sok csúcsa van. 3 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát nem lehet $\chi'(G) = 5$ vagyis $\chi'(G) = 6$. 1 pont

4. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{25}$, v_i és v_j $(i \neq j)$ akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha $|i - j| = 3$ vagy 5. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\rho(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$ értékeit.

Az összes él a páros és páratlan indexű csúcsok között fut, tehát ez egy páros graf, a két osztály a páros (A) illetve a páratlan (B) indexű csúcsok halmaza. 3 pont

12-nél nem lehet több független él, mert 13-nak már 16 végpontja lenne. Ennyi független él viszont van is: v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6, v_7v_{10}, v_8v_{11}, v_9v_{12}, $v_{13}v_{16}$, $v_{14}v_{17}$, $v_{15}v_{18}$, $v_{19}v_{22}$, $v_{20}v_{23}$, $v_{21}v_{24}$. Tehát $\nu(G) = 12$. 4 pont

Alkalmazhatjuk Kőnig és Gallai tételeit, mert páros gráf, nincs hurokél és nincs izolált pont, ezekből $\tau(G) = 12$, $\alpha(G) = 13$, $\rho(G) = 13$. 3 pont

5. $G_1(V, E_1)$ egy $|V| = 100$ csúcsú síkgráf, $G_2(V, E_2)$ pedig egy $K_{2,2}$ és 96 izolált pont. Legyen $G = G(V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 6$.

G_1 egy síkgráf, tehát kiszínezhető 4 színnel. 3 pont

Legyen a $K_{2,2}$ 4 csúcsa v_1, v_2, u_1, u_2, úgy, hogy v_1 és v_2 nem szomszédosak, u_1 és u_2 sem szomszédosak.

Most pedig színezzük át a v_1, v_2 csúcsokat két további színnel! 5 pont

Ez a 6-színezés jó lesz: egy E_1-beli él két vége különböző színű az eredeti 4-színezésben, az új színekkel való átszínezés ezt nem ronthatja el. 1 pont

Az E_2-höz tartozó élek végei is különböző színűek lesznek, ezt biztosítja a 2 új szín bevezetése. 1 pont

6. Létezik olyan egyszerű síkgráf, amelyre $n = e = t$?

Az Euler formula alapán $n - e + t = 1 + k$, ahol n a csúcsok, e az élek, t a tartományok, k a komponensek száma. 3 pont

Felhasználva, hogy $n = e = t$, azt kapjuk, hogy $n = 1 + k$. Ez viszont csak úgy lehetséges, hogy G-nek egyetlen egy éle van, tehát egy komponense 2 csúcsból áll, a többi izolált pont. 4 pont

Viszont akkor $e = 1$, tehát $n = 1$, csakhogy ez lehetetlen, akkor nem lehetne éle, mert egyszerű! Tehát nincs ilyen gráf. 3 pont