

Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2018. május 8, 14.15-15.45, E 306
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám, $\kappa(G)$: pont-összefüggőségi szám, $\lambda(G)$: él-összefüggőségi szám.

1. A G gráf csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{100} , v_i és v_j ($i \neq j$) akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha ij osztható 4-gyel. Van G -ben teljes párosítás?

Bontsuk 3 osztályra a csúcsokat. $V_1 = \{v_i | i \text{ páratlan}\}$, $V_2 = \{v_i | i \text{ 4-gyel osztható}\}$,
 $V_3 = \{v_i | i \text{ páros, de 4-gyel nem osztható}\}$. 2 pont
Világos, hogy V_1 csúcsai között illetve V_1 és V_3 között nem fut él. 3 pont
Tehát ha lenne G -ben teljes párosítás, akkor V_1 minden csúcsának egy V_2 -beli csúcs lenne a párja. 3 pont
Csakhogy ez lehetetlen, mert $|V_1| = 50$, $|V_2| = 25$. Tehát nincs G -ben teljes párosítás. 2 pont

2. a Adjunk meg olyan 100 csúcsú G gráfot, amelyre $\chi(G) = 4$ és $\tau(G) = 3$.

b. A G gráfra $\chi(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \geq 3$.

A K_4 (teljes négyes) majdnem jó: természetesen $\chi(K_4) = 4$ és bármelyik 3 csúcs lefogja az éleket, tehát $\tau(K_4) = 3$, viszont csak 4 pontja van. Sebj, adjunk hozzá még 96 izolált pontot, a kapott gráf kielégíti a feltételeket. 3 pont

Most tegyük fel, hogy egy G gráfra $\tau(G) \leq 2$. Ekkor van egy lefogó u, v pontpár. Ez azt jelenti, hogy a többi csúcs között nem fut él. 2 pont

Viszont akkor G kiszínezhető 3 színnel: u és v két különböző színt kap, az összes többi csúcs pedig egy harmadik színt. 3 pont

Tehát ha $\tau(G) \leq 2$ akkor $\chi(G) \leq 3$, vagyis ha $\chi(G) = 4$, akkor $\tau(G) \geq 3$. 2 pont

3. A G egyszerű gráfban minden csúcs foka 5, kivéve egy csúcsot, amelynek 1. Bizonyítsuk be, hogy $\chi'(G) = 6$.

Legyen v az 1-fokú csúcs, u a szomszédja. Mivel $\Delta(G) = 5$, a Vizing tétel szerint $5 \leq \chi'(G) \leq 6$. 2 pont

Tegyük fel, hogy $\chi'(G) = 5$. Vegyük a G éleinek egy 5-színezését és legyen az uv él színe piros. 1 pont

Ekkor v kivételével minden csúcsra mind az 5 színű élből illeszkedik pontosan 1. Tehát mondjuk a kék élek egy párosítást alkotnak, amiből csak a v csúcs marad ki. Ebből következik, hogy G -nek *páratlan* sok csúcsa van. 3 pont

Most pedig tekintsük a piros éleket, ezek egy *teljes* párosítást alkotnak, hiszen minden csúcsra illeszkedik pontosan egy piros él. Ebből következik, hogy G -nek *páros* sok csúcsa van. 3 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát nem lehet $\chi'(G) = 5$ vagyis $\chi'(G) = 6$. 1 pont

4. A G gráf csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{22} , v_i és v_j ($i \neq j$) akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha $|i - j| - 2$ osztható 4-gyel. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\rho(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$ értékeit.

Bontsuk 4 osztályra a csúcsokat. $V_0 = \{v_i | i \text{ } 4k \text{ alakú}\}$, $V_1 = \{v_i | i \text{ } 4k + 1 \text{ alakú}\}$, $V_2 = \{v_i | i \text{ } 4k + 2 \text{ alakú}\}$, $V_3 = \{v_i | i \text{ } 4k + 3 \text{ alakú}\}$. 1 pont

A G gráfban minden V_0 -beli csúcs össze van kötve minden V_2 -beli csúccsal és minden V_1 -beli csúcs össze van kötve minden V_3 -beli csúccsal. Más él nincs. 1 pont

Könnnyen látható, hogy $|V_0| = 5$, $|V_1| = 6$, $|V_2| = 6$, $|V_3| = 5$. Tehát G két darab $K_{5,6}$ teljes páros gráf diszjunkt uniója. 2 pont

$K_{5,6}$ tartalmaz 5 független élt, de hatot már nem, mert az egyik osztályban csak 5 pont van. Tehát $\nu(K_{5,6}) = 5$. Alkalmazhatjuk a Kőnig és Gallai tételeket, ezek alapján $\alpha(K_{5,6}) = 6$, $\rho(K_{5,6}) = 6$, $\tau(K_{5,6}) = 5$. 3 pont

Mivel G két $K_{5,6}$ diszjunkt uniója, mind a négy paramétere kétszer annyi: $\alpha(G) = 12$, $\rho(G) = 12$, $\tau(G) = 10$, $\nu(G) = 10$. 3 pont

5. $G_1(V, E_1)$ egy $|V| = 100$ csúcsú síkgráf, $G_2(V, E_2)$ pedig egy K_4 (4 csúcsú teljes gráf) és 96 izolált pont. Legyen $G = G(V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 7$.

G_1 egy síkgráf, tehát kiszínezhető 4 színnel. 3 pont

Legyen a K_4 4 csúcsa a, b, c, d . Most pedig színezzük át a b, c, d csúcsokat három további színnel! 5 pont

Ez a 7-színezés jó lesz: egy E_1 -beli él két vége különböző színű az eredeti 4-színezésben, az új színekkel való átszínezés ezt nem ronthatja el. 1 pont

Az E_2 -höz tartozó élek végei is különböző színűek lesznek, ezt biztosítja a 3 új szín bevezetése. 1 pont

6. A 100 csúcsú G egyszerű síkgráf tetszőleges síkbarajolására $e = t + 1$. Határozzuk meg e lehetséges értékeit.

Az Euler formula alapján $n - e + t = 1 + k$, ahol n a csúcsok, e az élek, t a tartományok, k a komponensek száma. 2 pont

Felhasználva, hogy $n = 100$ és $e = t + 1$, azt kapjuk, hogy $k = 98$. 2 pont

Tehát e lehetséges értékeit szeretnénk tudni a 98 komponensű, 100 csúcsú gráfokra. 1 pont

Ekkor vagy (a) minden komponens izolált pont, kivéve az egyik komponens 3 csúcsú, vagy (b) minden komponens izolált pont, kivéve két komponens 2 csúcsú. 3 pont

Az (a) esetben $e = 2$ vagy 3, a (b) esetben pedig $e = 2$. Tehát a válasz: $e = 2$ vagy 3. 2 pont