# Kombinatorika és gráfelmélet I

# **1. PótZH**, 2018. május 17, 12.15-13.45, T 604

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a számozott $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokon, amelyben legalább egy 55-fokú csúcs van?

A 100 csúcsú fák Prüfer kódja 98 hosszú és minden csúcs indexe eggyel kevesebbszer szerepel, mint a sorszáma. Tehát egy 55-fokú csúcs 54-szer szerepel. Mivel $2\cdot 54 = 108 > 98$, ebből következik, hogy az ilyen fákban *pontosan* 1 55-fokú csúcs van. 4 pont

Most számoljuk össze az ilyen fákat. Ki kell választani az 55-fokú $v_i$ csúcsot (100 lehetőség), elhelyezni az 54 darab $i$-t a Prüfer kódban ($\binom{98}{54}$) lehetőség), 3 pont

a maradék 44 helyre pedig $i$ kivételével bármit írhatunk ($99^{44}$ lehetőség) 2 pont

Tehát összesen $100\binom{98}{54}99^{44}$ ilyen fa van. 1 pont

Első rész másképp: Tegyük fel, hogy $u$ és $v$ is 55-fokú. Ekkor összesen 110 szomszédjuk van, tehát összesen legalább 108 $u$-tól és $v$-től különböző szomszédjuk van. Viszont csak 98 $u$-tól és $v$-től különböző csúcs van, tehát van legalább 2 (sőt, legalább 10) közös szomszédjuk, ez pedig egy 4-hosszú kört jelentene, ami nem lehet egy fában. Tehát az ilyen fákban *pontosan* 1 55-fokú csúcs van. 4 pont

2. A $G$ $2n$ csúcsú teljes gráf csúcsai $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n$. Minden $i, j$-re a $v_iu_j$ él súlya 2 és minden $i \neq j$-re a $v_iv_j$ él súlya 1, az $u_iu_j$ él súlya 3.
Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van $G$-nek?

A mohó algoritmus megtalálja az összes minimális összsúlyú feszítőfát, nézzük meg, hogy itt hogyan fut! 1 pont

Először a $v_1, \ldots, v_n$ csúcsokon keres egy tetszőleges $F$ feszítőfát, utána pedig minden egyes $u_i$ csúcsot egy éllel hozzáköt $F$-hez. 4 pont

Tehát az ilyen feszítőfákat kell összeszámolni. A $v_1, \ldots, v_n$ csúcsokon $n^{n-2}$ különböző $F$ feszítőfa van. 2 pont

Egy $u_i$ csúcsot $n$-féle módon köthetünk hozzá $F$-hez, ezért az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokat összesen $n^n$-féleképpen. 2 pont

Tehát $G$-nek összesen $n^{2n-2}$ minimális összsúlyú feszítőfája van. 1 pont

3. Általánosított zárt Euler élsorozatnak nevezünk egy gráfban egy olyan zárt élsorozatot, amely minden élen *páratlan* sokszor megy végig (mindegy, melyik irányban).
Bizonyítsuk be, hogy egy $G$ gráfban van Euler körséta akkor és csak akkor, ha van általánosított zárt Euler élsorozat.

Minden Euler körséta egyben általánosított zárt Euler élsorozat is, tehát az egyik irány nyilvánvaló: ha egy $G$ gráfban van Euler körséta, akkor van általánosított zárt Euler élsorozat is. 2 pont

Tanultuk (legalábbis elmondták órán) hogy egy $G$ gráfban van Euler körséta akkor és csak akkor, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros. 2 pont

Most tegyük fel, hogy a $G$ gráfban van egy $AZEE$ általánosított zárt Euler élsorozat. Ekkor természetesen izolált pontoktól eltekintve összefüggő. 1 pont

Most belátjuk, hogy minden csúcs foka páros. Egy zárt élsorozat ahányszor bemegy egy pontba, pontosan annyiszor ki is megy, tehát tetszőleges $v$ csúcsra igaz, hogy a $v$-re illeszkedő éleken $AZEE$ összesen páros sokszor megy végig. 2 pont

Tegyük fel, hogy $v$ foka páratlan. A feltétel szerint az $AZEE$ élsorozat minden élen páratlan sokszor megy végig, páratlan sok páratlan szám összege páratlan, tehát $AZEE$ a $v$-re illeszkedő éleken összesen páratlan sokszor megy végig, ami ellentmondás. Ebből következik, hogy nem lehet egy csúcs foka páratlan, vagyis $G$ izolált pontoktól eltekintve összefüggő, minden fok páros, ezért van Euler körséta. 3 pont

4. A $(G, s, t, c)$ hálózatban néhány él kapacitását megduplázzuk, a többi él kapacitását nem változtatjuk. Az így kapott $(G, s, t, c')$ hálózatban a maximális folyam nagysága 20.

Bizonyítsuk be, hogy az eredeti $(G, s, t, c)$ hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 10.

Legyen $M$ a $(G, s, t, c)$ hálózatban a maximális folyam nagysága, $M'$ a $(G, s, t, c')$ hálózatban a maximális folyam nagysága. Nyilván a $(G, s, t, 2c)$ hálózatban a maximális folyam nagysága $2M$. 3 pont

A feltételek szerint minden $e$ élre $c'(e)$ értéke $c(e)$ vagy $2c(e)$, vagyis $c'(e) \leq 2c(e)$. 2 pont

Ezért ha egy folyam megengedett a $(G, s, t, c')$ hálózatban, akkor megengedett a $(G, s, t, 2c)$ hálózatban is, vagyis $M' \leq 2M$. 3 pont

Tehát $20 = M' \leq 2M$, ezért $10 \leq M'$. 2 pont

5. A $G$ gráf élösszefüggőségi száma, $\lambda(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges szomszédos $u$ $v$ csúcsokra $d(u) + d(v) \geq 6$.

($d(v)$ a $v$ csúcs fokszáma)

Legyen $\lambda(G) = 4$ és legyen $v$ egy tetszőleges csúcs. A $v$-re illeszkedő éleket elhagyva $v$ izolált ponttá válik. 5 pont

Tehát minden $v$ csúcsra $d(v) \geq \lambda(G) = 4$, ezért tetszőleges (akár szomszédos, akár nem) $u$ $v$ csúcsokra $d(u) + d(v) \geq 8 > 6$. 5 pont

6. $G$ egy páros gráf $A$, $B$ osztályokkal. Az $A$ csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, fokszámaik $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Tudjuk, hogy minden $i$-re $d_i \geq 2^i$. Bizonyítsuk be, hogy $G$ tartalmaz $n$ független élt.

Elég a Hall feltételt ellenőrizni az $A$ halmazra, tehát hogy minden $X \subseteq A$-re $|N(X)| \leq |X|$. 2 pont

Legyen tehát $X \subseteq A$, $|X| = x$. Legyen $X$ legnagyobb indexű csúcsa $v_i$. Ekkor $i \geq x$. 4 pont

Ebből következik, hogy $|N(X)| \geq d_i \geq 2^i \geq 2^x \geq x = |X|$. Tehát teljesül a Hall feltétel, ezért van $A$-t fedő párosítás, ami $n$ független élt jelent. 4 pont