Kombinatorika és gráfelmélet I

1. ZH, 2018. március 27, 14.15-15.45, E 306

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a számozott $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsokon, amelyben *legalább* 3 levél (1-fokú csúcs) van?

Számoljuk meg inkább *nem* ilyen fákat, vagyis azokat a fákat, amelyeknek kevesebb, mint 3 levele van. 2 pont

Mivel minden fának van legalább 2 levele, az ilyen fáknak pontosan két levele van, ezek pedig éppen a Hamilton utak. 3 pont

A $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsok minden permutációja megfelel egy Hamilton útnak, viszont így minden Hamilton utat kétszer kapunk meg, mindkét irányítással egyszer. Tehát $n!/2$ Hamilton út van a $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsokon. 3 pont

Összesen n^{n-2} fa van a $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsokon, tehát az olyan fák száma, amelyekben legalább 3 levél van, $n^{n-2} - n!/2$. 2 pont

2. A G $2n$ csúcsú teljes gráf csúcsai $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$. Minden i, j-re a v_iu_j él súlya 3 és minden $i \neq j$-re a v_iv_j és súlya 1, az u_iu_j él súlya 2.

Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van G-nek?

A mohó algoritmus minden minimális feszítőfát megad, ennek futását követve látható, hogy a minimális feszítőfák a következő módon néznek ki: egy feszítőfa a $v_1, \dots, v_n$ csúcsokon, egy másik feszítőfa az $u_1, \dots, u_n$ csúcsokon, és egy él, ami összeköti őket. 3 pont

A $v_1, \dots, v_n$ csúcsokon n^{n-2} feszítőfa van, és az $u_1, \dots, u_n$ csúcsokon is n^{n-2} feszítőfa van. 3 pont

Az összekötő élt n^2-féleképpen húzhatjuk be. 2 pont

Tehát a válasz $n^{n-2}n^{n-2}n^2 = n^{2n-2}$. 2 pont

3. A G 10 csúcsú gráf egy teljes 4 csúcsú és egy teljes 6 csúcsú gráf diszjunkt uniója. Legkevesebb hány élet kell hozzávennünk G-hez, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler köre?

Legyenek $v_1, \dots, v_6$ a 6 csésú teljes gráf csésai és u_1, u_2, u_3, u_4 a 4 csésú teljes gráf csésai. Ahhoz, hogy legyen Euler kör, a kapott gráfnak összefüggőnek kell lenni és minden foknak párosnak. 2 pont

$v_1, \dots, v_6$ fokszáma 5, u_1, u_2, u_3, u_4 fokszáma 3. Tehát minden csúcsra kell, hogy illeszkedjen egy új él. 2 pont

Viszont a kapott gráfnak egyszerűnek kell lenni, ezért az új élek a $v_1, \dots, v_6$ csúcsok közül legfeljebb egyre illeszkedhetnek. Tehát legalább 6 új él kell. 3 pont

Ennyi elég is: Adjuk hozzá az eredeti gráfhoz a v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3, v_4u_4, v_5u_4 és v_6u_4 éleket. A kapott gráfban minden fokszám páros és összefüggő, tehát van Euler köre. Tehát a válasz 6. 3 pont

4. A (G, s, t, c) hálózat egyik, s-től és t-től különböző csúcsa v, amely nem szomszédos se s-sel se t-vel.

Adjuk hozzá G-hez az $\vec{sv}$ élt 1 kapacitással, így a kapott G' hálózatban a maximális st folyam nagysága 10.

Most adjuk hozzá G-hez a $\vec{vt}$ élt 1 kapacitással (de $\vec{sv}$-t nem!), így a kapott G'' hálózatban a maximális st folyam nagysága megint 10.

Határozzuk meg az eredeti (G, s, t, c) hálózatban a maximális st folyam nagyságát!

Legyen egy (S, T) vágás ($s \in S$, $t \in T$) 1-es típusú, ha $v \in T$ és 2-es típusú, ha $v \in S$. Legyen C_1 G-ben a minimális 1-es típusú vágás kapacitása, C_2 pedig G-ben a minimális 2-es típusú vágás kapacitása. 3 pont

Ekkor G-ben a maximális folyam nagysága $\min(C_1, C_2)$, G'-ben $\min(C_1 + 1, C_2)$, G''-ben $\min(C_1, C_2 + 1)$. 2 pont

Tehát a feltétel szerint $\min(C_1 + 1, C_2) = 10$, ezért $C_2 \geq 10$, és $\min(C_1, C_2 + 1) = 10$, ezért $C_1 \geq 10$. 2 pont

Viszont ekkor $C_1 + 1 \geq 11$, de $\min(C_1 + 1, C_2) = 10$, ezért $C_2 = 10$. Hasonóan, $C_2 + 1 \geq 11$, de $\min(C_1, C_2 + 1) = 10$, ezért $C_1 = 10$. 2 pont

Ekkor pedig G-ben a maximális folyam nagysága, $\min(C_1, C_2) = 10$. 1 pont

5. A G gráfnak 2018 csúcsa és 4000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy G pontösszefüggőségi száma, $\kappa(G) \leq 3$.

Legyenek a fokszámok $d_1, \ldots, d_{2018}$, az élek száma e. Tegyük fel, hogy minden fokszám legalább 4. 2 pont

Ekkor $2e = 8000 = \sum_{i=1}^{2018} d_i \geq \sum_{i=1}^{2018} 4 = 4 \cdot 2018 = 8072$, ami ellentmondás! 4 pont

Tehát van olyan fokszám, amely legfeljebb 3. Mondjuk $d_1 \leq 3$. Ekkor viszont a v_1 csúcs legfeljebb három szomádját elhagyva v_1 izolált ponttá válik, tehát $\kappa(G) \leq 3$. 4 pont

6. A G gráf csúcsai $u_1, \ldots, u_{12}$ és $v_1, \ldots, v_{12}$. Az u_i és v_j csúcsok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha $i \cdot j \leq 12$. Más él nincs. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét.

($\nu(G)$: független élek maximális száma, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma.)

A G gráf páros graf, az osztályok az $u_1, \ldots, u_{12}$ és a $v_1, \ldots, v_{12}$. Tehát a Kőnig tétel alapján $\nu(G) = \tau(G)$. 2 pont

Az u_1v_{12}, u_2v_6, u_3v_4, u_4v_3, u_6v_2, $u_{12}v_1$ élek függetlenek, tehát $\nu(G) \geq 6$. 3 pont

Tegyük fel, hogy u_i és v_j össze van kötve éllel. Ekkor $ij \leq 12$, így vagy $i \leq 3$, vagy $j \leq 3$. Ezért az u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, pontok egy lefogó ponthalmazt alkotnak. Ezért $\tau(G) \leq 6$. 3 pont

Összefoglalva, $6 \leq \nu(G) = \tau(G) \leq 6$, tehát $\nu(G) = \tau(G) = 6$. 2 pont