

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2018. április 19.

Élszínezés, síkgráfok bevezetés

$L(G)$: G élgráfja, csúcsai G éleinek felelnek meg, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő éleknek G -ben van közös végpontja.

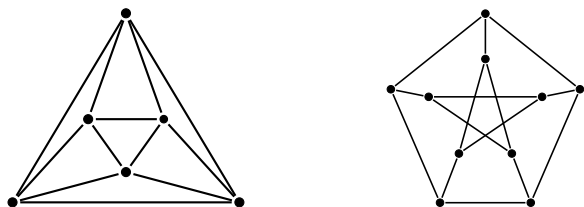
$\chi'(G) = \chi_e(G)$: G élkromatikus száma, G éleinek a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két közös végpontú él különböző színű.) Nyilván $\chi'(G) = \chi_e(G) = \chi(L(G))$.

Minden G gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing tétel: Minden G egyszerű gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig tétel: Ha G páros gráf, akkor $\Delta(G) = \chi'(G)$.

1. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.
2. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.
4. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.
5. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
6. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



7. Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.
8. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?
9. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.
10. Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - b) ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
 - d) G -nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
11. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
12. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \bar{G} egyike biztosan nem síkgráf.
13. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?

Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r -reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.
2. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!