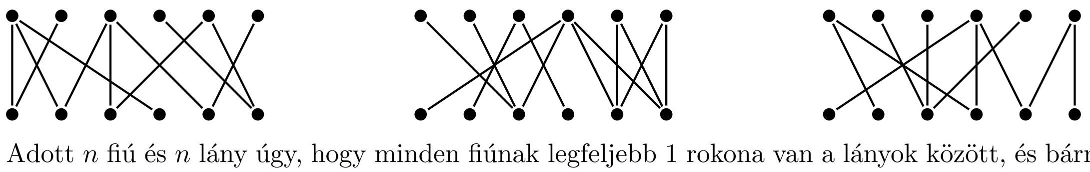
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2018. március 22.

Magasabb összefüggőség, Menger, Hall, Frobenius, Kőnig

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Tetszőleges $1 < \kappa < \lambda$ pozitív egészekre konstruáljunk G gráfot, amire $\lambda(G) = \lambda$ és $\kappa(G) = \kappa$.
3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\lambda(K_n)$ ill. $\kappa(K_n)$ élösszefüggőségi ill. pontösszefüggőségi számát. Ugyanez a kérdés a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra.
4. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy $\kappa(G) = 3$.
5. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n csúcsú k-összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges r-reguláris ($r > 1$) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő!
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges gráf esetén $\delta(G) \geq \lambda(G) \geq \kappa(G)$ teljesül. ($\delta(G)$ G-ben a legkisebb fokszám.)
9. Mutassuk meg, hogy ha a G egyszerű gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha bármely két csúcsára található olyan kör G-ben, amely ezen csúcsokat tartalmazza. Igazoljuk, hogy ha egy izolált pontot nem tartalmazó, egyszerű G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két élén keresztül vezet G-nek köre.
10. Tegyük fel, hogy a G gráf k-összefüggő. Vegyünk fel egy új x pontot, és kössük össze G k különböző pontjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf is k-összefüggő!
11. Igazoljuk Dirac tételét: ha $\kappa(G) \geq k \geq 2$, akkor G bármely k pontjához található G-nek olyan köre, amely mind a k pontot tartalmazza.
12. Mutassuk meg, hogy a 2-összefüggő ill. 2-élösszefüggő gráfoknak van fülfelbontása. Azaz, a 2-öf gráfok pontosan azok, amelyek felépíthetők egyetlen csúcsból fülek egymás utáni hozzáadásával. Itt minden fül a már felépített félkész gráf két különböző csúcsa közti olyan út, amelynek belső csúcsai nem szerepelnek az eddig felépített gráfban. A 2-élöf gráfok fülfelbontására hasonló igaz, megengedve, hogy egy fülnek a két vége ugyanaz a csúcs legyen. (Irányított gráfokra hogyan terjeszthetők ki ezek az állítások?)
13. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)
14. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok, és $V(G) = A \cup B \cup C$ a G gráf csúcshalmaza, valamint legyen $uv \in E(G)$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora $\kappa(G)$?
15. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, ill. 7?
16. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
17. Igazoljuk, hogy ha a G gráf 2017-pontú és 32-összefüggő, akkor G bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 63 élű út.
18. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



19. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.

20. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.
21. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
22. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
23. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
24. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
25. a. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G) \geq \nu(G)$ teljesül. b. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $2\nu \geq \tau \geq \nu$ számokhoz van olyan G gráf, amelyre $\nu(G) = \nu$ és $\tau(G) = \tau$.
26. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n+k-2)/2$, akkor G k-öf!
2. Legfeljebb hány éle lehet egy $G(A, B, E)$ páros gráfnak, ha $|A| = |B| = 100$ és $\nu(G) = 10$?