

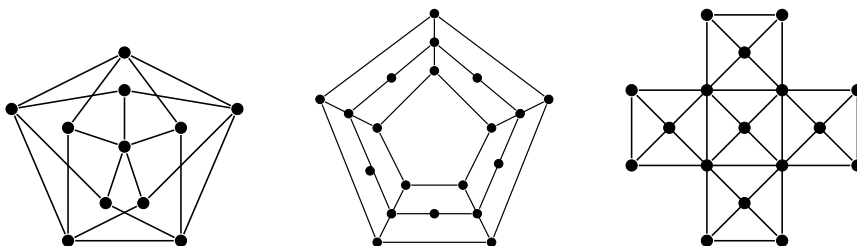
## Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2018. március 1.

*Euler-kör, Euler-út, Hamilton-kör, Hamilton-út*

1. Igazoljuk, hogy ha a  $G$  gráf minden fokszáma páros, akkor  $E(G)$  előáll éldiszjunkt körök uniójaként.
2. Igazoljuk, hogy ha  $G$  összefüggő és minden fokszáma páros, akkor  $G$ -ből elhagyhatók  $G$  egy körének élei úgy, hogy a kapott gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő maradjon.
3. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha minden pont be-foka egyenlő a ki-fokával, és gráf, mint irányítatlan gráf, összefüggő.
4. Legyenek a  $G_n$  gráf pontjai az  $n$  hosszú  $(0, 1)$  sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az  $n = 4$  esetben  $(0, 0, 0, 1)$  és  $(0, 1, 0, 1)$  szomszédosak). Van-e a  $G_n$  gráfnak Euler köre?
5. Mutassuk meg, hogy ha a  $G$  gráfnak van Euler köre, akkor  $G$  csúcsainak bármely részalmazából páros sok él indul a komplementerébe.
6. Egy egyszerű  $G$  gráf csúcsait az  $1, 2, \dots, 100$  számok jelölik. Az  $i$  és  $j$  csúcsok között pontosan akkor vezet él  $G$ -ben, ha  $|i - j| \leq 2$ . Tartalmaz-e  $G$  Euler kört, illetve Euler utat?
7. Mutassuk meg, hogy ha a  $G$  gráfnak van Euler köre, akkor  $G$  élgráfjának,  $L(G)$ -nek is van Euler köre!  
(A  $G$  gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai  $G$  éleinek felelnek meg, és két  $L(G)$ -beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő  $G$ -beli éleknek van közös végpontjuk.)
8. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
9. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, és pedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
10. A  $G$  gráfnak  $e$  és  $f$  két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá  $G$ -ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy  $G$ -ben olyan Euler-kör is van, melyben  $e$  és  $f$  egymást követik?
11. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)
12. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
  - (a) Ha  $G$  egy körének éleit törölve a maradék  $G'$  gráfnak van Euler-köre, akkor  $G$ -nek is van.
  - (b) Ha  $G$  összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék  $G'$  gráfnak van Euler-köre, akkor  $G$ -nek is van.
  - (c) Ha  $G$ -ben van Euler-kör és  $G$  valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék  $G'$  gráfban is van.
  - (d) Ha  $G$  összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék  $G'$  gráfban van Euler-út, akkor  $G$ -ben is van.
13. (a) Bejárható-e a  $4 \times 4$ -es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy  $3 \times 2$ -es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla ( $8 \times 8$ -as), (c)  $3 \times 5$ -ös, (d)  $3 \times 6$ -os sakktábla esetén?
14. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris  $G$  gráfban van Hamilton-kör, akkor  $G$  élei három színnel színezhetőek úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $2n$ -pontú  $G$  gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható  $G$ -nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy  $G$  minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
16. Legyen  $G$  egy  $2n$  csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy  $G$  minden csúcsának legalább  $n$  szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor  $G$ -nek legalább  $n$  csúcsát kell kiválasztanunk.
17. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

18. A  $G$  egyszerű gráfnak  $2n + 1$  csúcsa van és minden csúcsának legalább  $n$  a foka. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben van Hamilton-út!
19. Legyenek a  $G_n$  gráf pontjai az  $n$  hosszú  $(0, 1)$  sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az  $n = 4$  esetben  $(0, 0, 0, 1)$  és  $(0, 1, 0, 1)$  szomszédosak). Van-e a  $G_n$  gráfnak Hamilton-köre?
20. Egy  $G$  egyszerű gráf csúcsait az  $1, 2, \dots, 100$  számok jelölik. Az  $i$  és  $j$  csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha  $|i - j| \leq 2$ . Tartalmaz-e  $G$  Hamilton-kört, illetve utat?
21. Igazoljuk, hogy ha a  $G$  gráfban van Hamilton-kör, akkor a  $G - v$  ill. a  $G - e$  gráf  $G$  bármely  $v$  csúcsára és bármely  $e$  élére is összefüggő.
22. Hány különböző Hamilton-köre van a  $G_n$  gráfnak, ha
  - (a)  $G_n$  az  $n$  csúcsú  $K_n$  teljes gráfot jelöli és  $n \geq 3$ ;
  - (b)  $G_n$  egy olyan gráf, melyhez  $K_n$  egy  $x, y$  élének elhagyása révén jutunk és  $n \geq 4$ ;
  - (c)  $G_n$  a  $2n$  csúcsú  $K_{n,n}$  teljes páros gráfot jelöli és  $n \geq 2$ .
23. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?



24. Legalább hány éle van egy olyan hat ( $n$ ) pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
25. Legfeljebb hány éle lehet egy hat ( $n$ ) csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?
26. Legyen  $G$  egy  $n$  csúcsú gráf. Ha találunk két nem szomszédos  $u, v$  csúcsot, amelyekre  $d(u) + d(v) \geq n$ , akkor húzzuk be az  $uv$  élet. Ismételjük az eljárást, amíg el nem akadunk.

Előfordulhat, hogy ezt az eljárást többféleképpen is végrehajthatjuk, mert egy lépésben több lehetséges él közül is választhatunk. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is hajtjuk végre az eljárást, az eredményként kapott gráf mindig ugyanaz. (Ezt nevezzük  $G$  lezártjának.)

### Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris feszítő részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris feszítő részgráfja?  
(Egy gráfot  $k$ -regulárisnak nevezünk, ha minden csúcsának a foka  $k$ . Egy részgráfot *feszítő részgráfnak* nevezünk, ha az eredeti gráf összes pontját tartalmazza.)
2. Tegyük fel, hogy  $G$  egy összefüggő gráf, és hogy  $K$  egy olyan köre  $G$ -nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út  $G$  egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $K$  Hamilton-köre  $G$ -nek.