Kombinatorika és gráfelmélet I

2. Aláíráspótló ZH, 2017. május 16, 8.15-9.45, T 601/2

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám $\chi'(G)$: élkromatikus szám $\kappa(G)$: pontösszefüggőségi szám $\lambda(G)$: élösszefüggőségi szám.)

1. G egy egyszerű síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy $\lambda(G) < 6$.

2. A (36 csúcsú) G gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 6$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i-k| = 1$ vagy 5. Határozzuk meg a G élkromatikus számát, $\chi'(G)$-t.

3. G egy 100 csúcsú gráf amelynek nincs izolált pontja, $\nu(G) = \chi(G) = 2$. Határozzuk meg $\alpha(G)$-t.

4. G egy egyszerű páros gráf A és B osztályokkal, $|A| = |B| = n$, $n \geq 2$ páros. Tudjuk, hogy akárhogyan veszünk el $n/2$ csúcsot A-ból és $n/2$ csúcsot B-ből, a megmaradt gráfban van teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben is van teljes párosítás.

5. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_5$ és $u_1, u_2, \ldots, u_5$. A v_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1$ vagy 4, az u_i és u_j is pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1$ vagy 4, a v_i és u_j csúcsok pedig minden (i, j) párra össze vannak kötve, kivéve, ha $i = j = 1$. (Tehát G két 5 hosszú körből áll, amelyek között egy kivételével az összes él be van húzva.) Határozzuk meg $\tau(G)$-t.

6. G egy egyszerű, összefüggő 20 csúcsú síkbarajzolt gráf, amelynek minden tartománya háromszög, kivéve egyet, amelyik hatszög.
(Pontosabban: egy T tartományra legyen $|T|$ a határán levő élek száma. Ha egy él mindkét oldaláról T-t határolja, akkor kétszer számoljuk.)
Hány éle és hány tartománya van G-nek?