Kombinatorika és gráfelmélet I

2. ZH, 2017. április 26, 14.15-15.45, QBF 09

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám.

1. A G gráfnak 2017 csúcsa és 3000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy G *nem* 3-élösszefüggő.

Legyenek a csúcsok $v_1, \dots, v_{2017}$, fokszámaik $d_1, \dots, d_{2017}$. Tudjuk, hogy $d_1 + \dots + d_{2017} = 2e(G) = 6000$. 3 pont

Ha minden fokszám legalább 3 lenne, vagyis minden i-re $d_i \geq 3$, akkor $d_1 + \dots + d_{2017} \geq 3 \cdot 2017 = 6051$, ami az előzőek szerint lehetetlen. 4 pont

Tehát van olyan i, amelyre $d_i \leq 2$. Ekkor viszont a v_i-ből induló, legfeljebb 2 élt elhagyva v_i izolált ponttá válik. Ebből következik, hogy G nem 3-élösszefüggő. 3 pont

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_5$ és $u_1, u_2, \dots, u_5$. A v_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1$ vagy 4, az u_i és u_j is pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1$ vagy 4, a v_i és u_j csúcsok pedig minden (i,j) párra össze vannak kötve, kivéve, ha $i = j = 1$. (Tehát G két 5 hosszú körből áll, amelyek között egy kivételével az összes él be van húzva.) Határozzuk meg $\chi(G)$-t.

A $v_1, v_2, \dots, v_5$ illetve az $u_1, u_2, \dots, u_5$ csúcsok által feszített öt hosszú körök (V illetve U) kromatikus száma 3. 3 pont

(Tehát G-t könnyedén ki tudjuk színezni 6 színnel: 3 színnel a $v_1, v_2, \dots, v_5$ csúcsokat és másik 3 színnel az $u_1, u_2, \dots, u_5$ csúcsokat. Vegyük észre, hogy V illetve U 3-színezésében az egyik szín egyszer, a másik két szín kétszer-kétszer szerepel. Ennek alapjan kicsit spórolhatunk, mivel v_1 és u_1 nincs összekötve, lehetnek egyforma színűek.)

Tehát színezzük a $v_1, v_2, \dots, v_5$ és $u_1, u_2, \dots, u_5$ csúcsokat a következő módon: v_1 és u_1 1-es színű, v_2 és v_4 2-es színű, v_3 és v_5 3-as színű, u_2 és u_4 4-es színű, u_3 és u_5 5-ös színű. Ez egy jó 5-színezése G-nek, tehát $\chi(G) \leq 5$. 4 pont

Ugyanakkor U és V kromatikus száma 3, és minden él be van húzva U és V csúcsai közé, kiveve egyet ($u_1 v_1$) ezért legfeljebb egy színt használhatunk U és V színezésében is. Tehát $\chi(G) \geq 5$, ebből pedig következik, hogy $\chi(G) = 5$. 3 pont

3. G egy 100 csúcsú gráf amelynek nincs izolált pontja, $\rho(G) = 99$. Bizonyítsuk be, hogy G nem tartalmaz 3-nál hosszabb kört.

1. megoldás. A Gallai tétel szerint $\rho(G) + \nu(G) = 100$, tehát itt $\nu(G) = 1$, vagyis nincs két független él. 5 pont

Ha viszont lenne G-ben 3-nál hosszabb kör, akkor lenne két független él. 4 pont

Tehát G-ben nem lehet 3-nál hosszabb kör. 1 pont

2. megoldás. A minimális lefogó élhalmaz nem tartalmazhat háromszöget és három hosszú utat, mert akkor elvehetnénk belőle egy élet. Tehát a lefogó élhalmaz diszjunkt csillagok uniója. Ha k csillagból áll, akkor $100-k$ éle van, vagyis a mi esetünkben $k = 1$, tehát a minimális lefogó élhalmaz egy 99 élű csillag. 5 pont

Ekkor viszont más éle nem is lehet G-nek, különben lenne 98 élű lefogó élhalmaz is. (A csillagon kívüli élet bevéve és a végpontjaiba mutató csillag-éleket elvéve egy 98 élű lefogó élhalmazt kapnánk.) 4 pont

Tehát az egész G gráf egy csillag, *semmilyen* kör nincs benne. 1 pont

4. G egy egyszerű páros gráf A és B osztályokkal, $|A| = n$, $|B| = 2n-1$, $n > 1$. A csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, v_i fokszáma d_i. Tudjuk, hogy minden i, j-re $d_i + d_j \geq 2n$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz n független élet.

Belátjuk, hogy teljesül a Hall feltétel. Legyen $X \subseteq A$, $N(X) \subseteq B$ X szomszédainak a halmaza. 1 pont

Legyen először $|X| = 1$, mondjuk $X = \{v_i\}$. Legyen $j \neq i$. Tudjuk, hogy $d_i + d_j \geq 2n$, de mivel $|B| = 2n-1$, $d_j \leq 2n-1$. Tehát $d_i \geq 1$, vagyis $|N(X)| = d_i \geq 1 = |X|$. 4 pont

Most tegyük fel, hogy $|X| \geq 1$. Ekkor van $j \neq i$, $v_i, v_j \in X$. Viszont $d_i + d_j \geq 2n$, tehát vagy $d_i \geq n$, vagy $d_j \geq n$. Tegyük fel hogy $d_i \geq n$. Ugyanakkor $|X| \leq |A| = n$. Tehát $|N(X)| \geq d_i \geq n \geq |X|$. 4 pont

Tehát teljesül a Hall feltétel, ezért a Hall tétel alapján van A-t lefedő párosítás, ami n független élet jelent. 1 pont

5. A 100 csúcsú G síkgráfban a v csúcs az összes többi csúccsal szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 33$.

A Négyszíntétel szerint G kiszínezhető 4 színnel. 3 pont

Ebben a színezésben v színét semelyik más csúcs nem kaphatja. Tehát a maradék 99 csúcs 3 színnel van kicsínezve. 3 pont

Vagyis valamelyik színosztály legalább 33 csúcsból áll. 3 pont

Ezek a csúcsok pedig egy független ponthalmazt alkotnak, tehát $\alpha(G) \geq 33$. 1 pont

6. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg $t(G)$ maximumát és minimumát, ha G bármilyen 8 élű összefüggő síkbarajzolt egyszerű gráf lehet.

Az Euler formula alapján (felhasználva, hogy G összefüggő) $n(G) - e(G) + t(G) = 1 + k = 2$. 2 pont

Mivel $e(G) = 8$, $t(G) = 10 - n(G)$. Tehát $t(G)$ maximális, ha $n(G)$ minimális, és $t(G)$ minimális, ha $n(G)$ maximális. 2 pont

Tudjuk, hogy egy összefüggő, n csúcsú síkgráfnak legalább $n-1$ és legfeljebb $3n-6$ éle lehet. 2 pont

Most az élek száma, $e(G) = 8$, ennek alapján $n(G)$ maximális, ha $n(G) - 1 = 8$ vagyis $n(G) = 9$. Ekkor $t(G) = 10 - n(G) = 1$, ez $t(G)$ minimuma. Ez megvalósítható, ha G egy fa. 2 pont

Végül $3n(G) - 6 \geq 8$ tehát $n(G) \geq 14/3$ de mivel $n(G)$ egész, $n(G)$ minimális értéke 5. Ekkor $t(G) = 10 - n(G) = 5$, ez $t(G)$ maximuma. Ez is megvalósítható, ha G egy 5 pontú háromszögelés minusz egy él. (Pl egy négyzet alapú gúla.) 2 pont