Kombinatorika és gráfelmélet I

# **1. PÓTZH**, 2017. május 11, 12.15-13.45, T 604

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Az $F$ 9 csúcsú fában 6 levél (1 fokú csúcs) van és 2 darab 3 fokú csúcs.
a. Mennyi a kilencedik csúcs fokszáma?
b. Hány olyan fa van a $v_1, \ldots, v_9$ csúcsokon, amelynek ugyanez a fokszámsorozata?

Egy $n$ csúcsú fának $n-1$ éle van, tehát a 9 csúcsúnak 8. Ebből következik, hogy a csúcsok fokszámainak az összege 16. Az adott fokszámok összege $6+6=12$, tehát a kilencedik csúcs fokszáma 4. 3 pont

A Prüfer kódban, amely itt 7 hosszú, minden csúcs sorszáma eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fokszáma. Ezért az ilyen fák Prüfer kódjai az olyan 7 hosszú sorozatok, amelyeknek minden tagja 1 és 9 közti egész szám, két szám kétszer szerepel, egy pedig háromszor. 3 pont

Egy ilyen kódhoz ki kell választanunk a háromszor szereplő számot és annak három helyét a kódban, ez eddig $\binom{7}{3} \cdot 9$ lehetőség, utána a maradék 4 hely közül kettőt és az ott szereplő számot, majd még egy számot a maradék két helyre. Ez eddig $\binom{7}{3} \cdot 9 \cdot \binom{4}{2} \cdot 8 \cdot 7$ lehetőség, de így minden kódot kétszer számoltunk, mert a két kétszer szereplő számot kétféle sorrendben választhattuk ki. Tehát a válasz $\binom{7}{3} \cdot 9 \cdot \binom{4}{2}(8 \cdot 7)/2 = \binom{7}{3} \cdot 9 \cdot \binom{4}{2}\binom{8}{2}$. 4 pont

Ha valaki a végén nem oszt 2-vel, az 1 pont levonás.

2. A $G$ 10 csúcsú gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_5$, $u_1, u_2, \ldots, u_5$. Minden $i, j$-re $v_i$ össze van kötve $u_j$-vel, más él nincs. (Vagyis $G$ egy $K_{5,5}$ teljes páros gráf.) Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan veszünk hozzá $G$-hez éleket, úgy, hogy a kapott $G'$ gráf egyszerű, $G'$ nem tartalmazhat Euler kört.

Tegyük fel, hogy sikerült hozzáadni $G$-hez éleket, úgy, hogy a kapott $G'$ gráf egyszerű és $G'$ tartalmaz Euler kört. Nyilván $G'$-ben minden csúcs foka páros. 2 pont

Legyen $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$. Mivel a kapott gráfnak, $G'$-nek egyszerűnek kell lenni, viszont $U$ és $V$ között minden él be van húzva, a hozzáadott élek mindkét vége $U$-beli, vagy mindkét vége $V$-beli. 2 pont

Legyen $H$ az a gráf, amelynek a csúcshalmaza $V$, élei a hozzáadott élek, amelyek mindkét vége $V$-beli. Mivel $G$-ben minden $v_i$ foka 5, $G'$-ben meg minden fokszám páros, $H$-ban minden pont foka páratlan. 3 pont

Csakhogy $H$-nak 5 csúcsa van, ezért ebben az esetben a fokszámok összege is páratlan lenne! Ez nem lehet, mert a fokszámok összege az élek számának a duplája, ami mindig páros. Tehát ellentmondásra jutottunk, ezzel a feladat állítását beláttuk. 3 pont

3. A $G$ teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$. A $v_1$-ből induló élek súlya $x$, a többi él súlya 10. Határozzuk meg $G$ minimális összsúlyú feszítőfájának a súlyát $x$ függvényében ($x \geq 0$).

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus egy minimális feszítőfát talál. Nézzük meg hogy fut le különböző $x$ értékekre. Legyen $M(x)$ a minimális összsúlyú feszítőfa súlya. $G$-nek 20 csúcsa van, tehát a keresett feszítőfának 19 éle lesz. 2 pont

Legyen $0 \leq x \leq 10$. Ekkor az algoritmus az $x$ súlyú éleket választja ($x = 10$ esetén választHATja) amíg lehetséges, vagyis amíg el nem jutunk egy feszítőfához, ami egy $v_1$ középpontú csillag lesz. Tehát $0 \leq x \leq 10$ esetén $M(x) = 19x$. 4 pont

Most legyen $10 \leq x$. Ekkor az algoritmus először a 10 súlyú, vagyis a $v_1$-re nem illeszkedő éleket választja ($x = 10$ esetén választHATja) amíg lehetséges, vagyis amíg el nem jutunk egy feszítőfához a $v_2, v_3, \ldots, v_{20}$ csúcsokon. Ez 18 él. Ezután egy $x$ súlyú élt választ, és ezzel kész is vagyunk. Tehát $10 \leq x$ esetén $M(x) = 180+x$. 4 pont

A helyes esetszétválasztásért (ha az esetek kidolgozása hiányzik) 2 pont jár.

4. A $G$ $n$ csúcsú ($n \geq 3$) gráf a következő izgalmas tulajdonsággal rendelkezik: a $\overline{G}$ gráfban, vagyis $G$ komplementerében, bármely két szomszédos csúcs fokszámának az összege legfeljebb $n-2$. Bizonyítsuk be, hogy $G$ tartalmaz Hamilton utat!

$G$ tetszőleges $v$ csúcsára legyen $d(v)$ $v$ fokszáma $G$-ben és legyen $\overline{d}(v)$ $v$ fokszáma $\overline{G}$-ben. Minden $v$ csúcsra $d(v) + \overline{d}(v) = n-1$. 3 pont

Legyen $u$ és $v$ két csúcs, amelyek szomszédosak $\overline{G}$-ben. Ekkor a feltétel szerint $\overline{d}(u) + \overline{d}(v) \leq n-2$, vagyis $(n-1-d(u)) + (n-1-d(v)) \leq n-2$, ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy $n \leq d(u) + d(v)$. 4 pont

Vagyis a feltételből következik, hogy $G$-ben bármely két *nem szomszédos* csúcs fokszámának az összege legalább $n$. Ez éppen a jól ismert Ore feltétel! Tehát az Ore tétel alapján $G$ tartalmaz Hamilton kört, így Hamilton utat is. 3 pont

5. A $(G, s, t, c)$ hálózatban a maximális folyam nagysága 100. Adjunk hozzá minden él kapacitásához 1-et, így kapjuk a $(G, s, t, c+1)$ hálózatot, amelyben a maximális folyam nagysága 110. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti $(G, s, t, c)$ hálózatban van olyan él, amelynek a kapacitása legalább 10.

Mivel a $(G, s, t, c+1)$ hálózatban a maximális folyam nagysága 110, ezért (a Ford-Fulkerson tétel alapján) van benne egy 110 kapacitású $(S, T)$ vágás. 2 pont

Tegyük fel, hogy az $(S, T)$ vágásban $k$ darab $S$-ből $T$-be mutató él van. Ezek kapacitásainak az összege természetesen 110. Ekkor a $(G, s, t, c)$ hálózatban ezen élek kapacitásainak az összege $110-k$, vagyis ennyi a $(G, s, t, c)$ hálózatban az $(S, T)$ vágás kapacitása. 3 pont

De a feltétel és a Ford-Fulkerson tétel szerint $110 - k \geq 100$, hiszen $(G, s, t, c)$-ben a maximális folyam nagysága 100. Ebből következik, hogy $k \leq 10$. 2 pont

De a $k$ darab $S$-ből $T$-be mutató él kapacitásának összege a $(G, s, t, c+1)$ hálózatban 110, tehát valamelyik él kapacitása legalább 11. Ennek az élnek eredeti $(G, s, t, c)$ hálózatban a kapacitása legalább 10. 3 pont

6. Határozzuk meg az 5 csúcsú egyszerű $G$ gráfok élszámának a maximumát, amelyekre $\kappa(G) = 1$. ($\kappa(G)$ $G$ pontösszefüggőségi száma.)

Mivel ($\kappa(G) = 1$, $G$ összefüggő, de van elvágó pontja. Legyen ez $v$. 2 pont

Ha $v$-t elhagyjuk, akkor tehát $G$ több komponensre esik szét. Feltehetjük, hogy kettőre, mert különben további éleket húzhatnánk be $G$-be úgy, hogy $\kappa$ 1 marad. 2 pont

Két esetet különböztetünk meg: (a) a két komponens mérete 1 és 3, illetve (b) mindkét komponens mérete 2. 2 pont

Mindkét esetben úgy kapjuk a maximális élszámot, ha a komponenseken belül minden élt behúzunk, és $v$-vel minden csúcsot összekötünk. 2 pont

Az (a) esetben 7, a (b) esetben 6 élt kapunk, tehát a válasz 7. 2 pont