Kombinatorika és gráfelmélet I

1. ZH, 2017. március 22, 14.15-15.45, QBF 12

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, amelyben $d_1+d_2+d_3=4$? (d_i a v_i csúcs fokszáma)

Tudjuk, hogy a Prüfer kódban minden csúcs sorszáma eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fokszáma. 2 pont

Mivel $d_1+d_2+d_3=4$, $(d_1-1)+(d_2-1)+(d_3-1)=1$, tehát a Prüfer kódban az 1, 2 és a 3 *összesen* egyszer szerepel. 4 pont

Ilyen kódból pedig összesen $3(n-2)(n-3)^{n-3}$ darab van. ($n-2$–féleképpen választhatjuk ki azt az egyetlen helyet, ahol 1, 2 vagy 3 áll, ide háromféle számot írhatunk, a többi $n-3$ helyre pedig mindenhova $n-3$–félét.) 4 pont

2. A G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, és minden csúcs foka 55. Bizonyítsuk be, hogy el lehet hagyni G-ből 50 élt úgy, hogy a maradék gráfban legyen Euler kör.

A Dirac tétel szerint, mivel minden fokszám legalább 50, G-ben van Hamilton kör. 3 pont

Ez a Hamilton kör természetesen 100 élből áll, hagyjuk el második élét G-ből. Legyen a kapott gráf G'. 2 pont

Minden csúcsra pontosan egy él illeszkedik az elhagyott élek közül, tehát a G' gráfban minden csúcs foka 54. 2 pont

Mivel G'-ben minden csúcs foka 54, G' minden összefüggő komponensében legalább 55 csúcs van. Ez csak úgy lehetséges, ha csak *egy* összefüggő komponens van, vagyis G' összefüggő. (Úgy is mondhatjuk, hogy a nagy fokszákom miatt bármely két csúcsnak van közös szomszédja, tehát G' összefüggő.) 2 pont

Ekkor viszont G'-ben van Euler kör, mert összefüggő és minden fokszám páros. 1 pont

3. A G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$, $u_1, u_2, \ldots, u_{20}$. A v_iv_j élek súlya 1, az u_iu_j élek súlya 10, a v_iu_j élek súlya x. Határozzuk meg G minimális összsúlyú feszítőfájának a súlyát x függvényében.

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus egy minimális feszítőfát talál. Nézzük meg hogy fut le különböző x értékekre. Legyen $M(x)$ a minimális összsúlyú feszítőfa súlya. G-nek 40 csúcsa van, tehát a keresett feszítőfának 39 éle lesz. 1 pont

Legyen $0 \leq x \leq 1$. Ekkor az algoritmus az x súlyú éleket választja ($x=1$ esetén választHATja) amíg lehetéges, vagyis amíg el nem jutunk egy feszítőfához. Tehát $0 \leq x \leq 1$ esetén $M(x)=39x$. 3 pont

Most legyen $1 \leq x \leq 10$. Ekkor az algoritmus először az 1 súlyú éleket választja ($x=1$ esetén választHATja) amíg lehetéges, vagyis amíg el nem jutunk egy feszítőfához a $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$ csúcsokon. Ez 19 él. Ezután az x súlyú éleket választja ($x=10$ esetén választHATja), és 20 darab él kiválasztása után el is jutunk egy feszítőfához. Tehát $1 \leq x \leq 10$ esetén $M(x)=19+20x$. 3 pont

Végül legyen $x \geq 10$. Ekkor az algoritmus először az 1 súlyú éleket választja amíg el nem jutunk egy feszítőfához a $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$ csúcsokon. Ez 19 él. Ezután jönnek a 10 súlyú élek ($x=10$ esetén jöHETnek), amíg el nem jutunk egy feszítőfához az $u_1, u_2, \ldots, u_{20}$ csúcsokon. Ez további 19 él. És a legvégén kénytelenek vagyunk egyetlen egy x súlyú élt is bevenni, ami összeköti a két feszítőfát. Tehát $10 \leq x$ esetén $M(x)=19+19\cdot 10+x=209+x$. 3 pont

A helyes esetszétválasztásért (ha az esetek kidolgozása hiányzik) 2 pont jár.

4. Minimálisan hány élet kell hozzávenni a $K_{5,6}$ teljes páros gráfhoz, hogy legyen benne Hamilton kör? (A $K_{n,m}$ teljes páros gráfnak $n + m$ csúcsa van, és az első n mindegyike össze van kötve az utolsó m mindegyikével, más él nincs.)

Legyenek az egyik osztály csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_5$, a másik osztályé $u_1, u_2, \dots, u_6$. Ha G-ből elvesszük a v_1, v_2, $\dots$, v_5 csúcsokat, akkor az $u_1, u_2, \dots, u_6$ csúcsok izolált pontok lesznek. Tehát 5 pont elhagyásával 6 komponenst kaptunk, nem teljesül az ismert szükséges feltétel (k pont elhagyásával legfeljebb k komponenst kaphatunk). Ezért $K_{5,6}$ nem tartalmaz Hamilton kört. 5 pont

Egy él hozzáadásával viszont már elérhetjük, hogy legyen Hamilton kör, húzzuk be pl az u_1u_2 élet. Ekkor az $v_1u_1u_2v_2u_3v_3u_4v_4u_5v_5u_6v_1$ egy Hamilton kör. 5 pont

5. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagysága 100. Adjunk hozzá minden él kapacitásához 1-et, így kapjuk a $(G, s, t, c + 1)$ hálózatot, amelyben a maximális folyam nagysága 110. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti (G, s, t, c) hálózatban van olyan él, amelynek a kapacitása legfeljebb 10.

Mivel a (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagysága 100, ezért (a Ford-Fulkerson tetel alapján) van benne egy 100 kapacitású (S, T) vágás. 3 pont

Tegyük fel, hogy az (S, T) vágásban k darab S-ből T-be mutató él van. Ezek kapacitásainak az összege természetesen 100. Ekkor a $(G, s, t, c + 1)$ hálózatban ezen élek kapacitásainak az összege $100 + k$, vagyis ennyi a $(G, s, t, c + 1)$ hálózatban az (S, T) vágás kapacitása. 3 pont

De a feltétel és a Ford-Fulkerson tétel szerint $100 + k \geq 110$, hiszen $(G, s, t, c + 1)$-ben a maximális folyam nagysága 110. Ebbő következik, hogy $k \geq 10$. 2 pont

De a k darab S-ből T-be mutató él kapacitásának összege az eredeti (G, s, t, c) hálózatban 100, tehát valamelyik él kapacitása legfeljebb 10. 2 pont

6. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_n$, $n \geq 10$. A v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| = 1$, 2, vagy 4. Határozzuk meg G pontösszefüggőségi számát, $\kappa(G)$-t.

A v_1 pontnak 3 szomszédja van, v_2, v_3, v_5, ezért ezen pontok elhagyásával szétesik G. Tehát $\kappa(G) \leq 3$. 4 pont

Most próbáljunk meg elhagyni két pontot G-ből. Először tegyük fel, hogy a két elhagyott pont nem szomszédos. Ekkor végig tudjuk járni a megmaradt $n - 2$ pontot növekvő sorrendben, a kihagyott pontokat atugorhatjuk a 2 hosszú élek segítségével. 3 pont

Most hagyjunk el két szomszédos pontot, mondjuk v_i-t és v_{i+1}-et. (Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $i > 1$.) Hagyjuk el v_{i-1}-et is! Ekkor megint végig tudjuk járni a megmaradt $n - 2$ pontot növekvő sorrendben, a kihagyott pontokat atugorhatjuk a 4 hosszú él segítségével. Végül tegyük vissza v_{i-1}-et. Ide is el tudunk jutni, megpedig v_{i+3}-ból. Tehát 2 pont elhagyásával nem esik szét G, ezért $\kappa(G) = 3$. 3 pont