Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2017. március 30.

Kőnig, Hall, Frobenius és Gallai tételei

<u>**Tudnivalók**</u>

Kőnig tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. (b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

Gallai tétel: (a) Ha G–ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma. (b) Ha G–ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

Frobenius tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Hall Tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

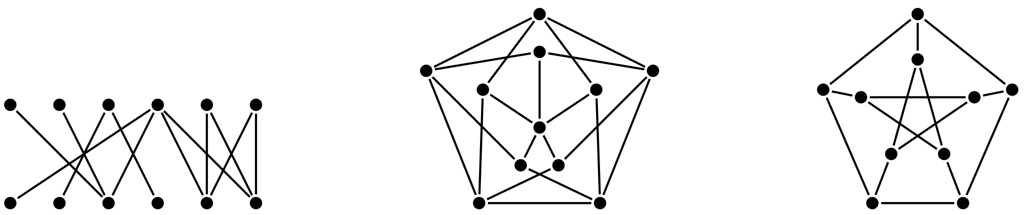
Tutte tétel: A G véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges X csúcshalmazra $G - X$-nek legfeljebb $|X|$ páratlan komponense van: $c_p(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$ esetén.

Táblázatba sűrített tudomány

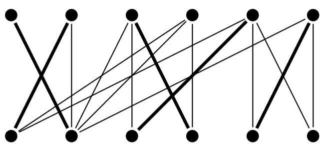
$\alpha \leq \rho$	max ftn	min lef	ps gráfra $\nu = \tau$ (Kőnig)
pont	α	τ	$\nexists$ hurokél: $\alpha + \tau = n$ (Gallai 1)
él	ν	ρ	$\nexists$ iz. pont: $\nu + \rho = n$ (Gallai 2)
$\nu \leq \tau \leq 2\nu$			ps gráfra ($\nexists$ iz. pont) $\alpha = \rho$ (Kőnig)

1. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
2. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
3. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
4. Mutassuk meg, hogy ha G olyan $(n-1)$-öf, $2n$ csúcsú gráf, amire $\tau(G) \geq n$, akkor G-nek van teljes párosítása.
5. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
6. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
7. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

8. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



9. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.
10. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!
11. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?
12. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.
13. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



14. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.
15. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.

Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy a 100 pontú G páros gráf minden v csúcsára $10 \leq d(v) \leq 15$ teljesül. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 34$.