Kombinatorika és gráfelmélet 1.

12. gyakorlat, 2017. április 27.

Legrövidebb utak

Def: Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfüggvény. Az $uv \in E$ él *hossza* alatt az $l(uv)$-t értjük. A G egy P útjának a *hossza* a P éleinek összhossza. Az $u, v \in V$ pontok *távolságát*, azaz a legrövidebb uv-út hosszát $dist_l(u, v)$ jelöli. Tehát $dist_l(u, v) = \ell$, ha létezik ℓ hosszúságú uv út G-ben, de ℓ-nél rövidebb uv-út nincs. (Ha egyáltalán nincs uv-út G-ben, akkor $dist_l(u, v) = \infty$. Ha nem adjuk meg az l távolságfüggvényt, akkor az $l \equiv 1$ függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

Feladatok.

1. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény. Tegyük fel, hogy egy u-ból v-be vezető élsorozat éleinek összhossza ℓ. Igazoljuk, hogy $dist_l(u, v) \le \ell$.
2. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény, valamint egy $r \in V$ gyökérpont. Tegyük fel, hogy $d(r) = 0$, továbbá $d(v) \ge dist_l(r, v)$ teljesül minden $r \ne v \in V$ esetén. Ha valamely $uv \in E$ esetén $d(v) > d(u) + l(u, v)$, akkor végrehajtható az *uv élmenti javítás*, amikoris $d(v)$ értékét $d(u) + l(u, v)$-re csökkentjük.
   - Igazoljuk, hogy a fenti élmenti javítás után kapott d függvényre $d(v) \le dist_l(r, v)$ teljesül.
   - Mutassuk meg, hogy ha $d(v) = dist_l(r, v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra, akkor nem végezhető élmenti javítás.
   - Bizonyítsuk be, hogy ha nem végezhető élmenti javítás, akkor $d(v) = dist_l(r, v)$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.
   - Igazak-e a fentiek akkor, ha a távolságfüggvény negatív értékeket is felvehet? Miért?
   - Mi a helyzet akkor, ha a $dist_l(u, v)$ definíciójában legrövidebb út helyett legrövidebb élsorozattal dolgozunk?
3. Hogyan lehet zsineggel, vonalzóval és csavaralátétekkel nemnegatív élhosszok mellett irányítatlan gráfban legrövidebb utat meghatározni?
   És hogyan lehet birkavesével földrengést megelőzni?
4. Törpfalván járvány ütötte fel a fejét az követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
5. Tervezzünk hatékony algoritmust, amelynek inputja egy (szomszédossági mátrixával megadott) $G = (V, E)$ (irányított) gráf és egy k szám, outputja pedig minden $u, v \in V$ csúcspárra megadja, hogy G-ben hány különböző k élből álló élsorozat vezet u-ból v-be. (Pl. $k = 1$ esetén az inputként megadott szomszédossági mátrix outputnak is kiváló.)
6. Legyenek $l_1, l_2 : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvények a $G = (V, E)$ gráfon. Igaz-e, hogy ilyenkor $dist_{l_1}(u, v) + dist_{l_2}(u, v) = dist_{l_1+l_2}(u, v)$ mindig teljesül minden $u, v \in V$-re?

Házi feladat.

1. Adott $G = (V, E)$ gráf és $l : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény esetén legyen $f(v) := \max\{dist_l(v, u) : u \in V\}$. Határozzuk meg, a $\frac{f(v)}{f(u)}$ érték maximumát, ha $u, v \in V(G)$ és G tetszőleges véges, összefüggő, irányítatlan gráf lehet.