Kombinatorika és gráfelmélet I

2. Aláíráspótló ZH, 2016. május 25, 8.15-9.45, QBF 10

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\Delta(G)$: maximális fokszám.

1. Az 1000 csúcsú G gráfra $\alpha(G) \leq 100$. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \geq 9$.

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, v_i és v_j pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1, 4, 5$. Határozzuk meg $\chi(G)$-t.

3. Határozzuk meg az olyan 100 csúcsú G páros gráfok maximális élszámát, amelyeknek mindkét osztályában 50 csúcs van, és $\nu(G) = 4$.

4. G egy egyszerű páros gráf A és B osztályokkal. A csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, v_i fokszáma d_i. B csúcsai $u_1, \ldots, u_m$, u_i fokszáma d'_i. Tudjuk, hogy minden i, j-re $d_i + d'_j \geq i + j$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz vagy A-t vagy B-t lefedő párosítást.

5. Legyen G egy e élű síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy legalább $e/6$ élű páros gráfot!
(Igazából $e/2$-vel is igaz, ráadásul minden gráfra, nem csak síkgráfra!)

6. Határozzuk meg a 6 élű, *nem feltétlenül összefüggő*, (akárhány csúcsú), egyszerű síkbarajzolt G gráfok tartományainak, $t(G)$-nek a lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.