

Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2016. május 6, 14.15-15.45, E 505
 Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám.

1. A 2016 csúcsú egyszerű G gráf 14-élösszefüggő. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq 8$.
 (Valójában $\nu(G) \geq 14$ is igaz, de ezt nem kell belátni.)

Első megoldás: ($\nu(G) \geq 8$ -at bizonyítunk)

Mivel G 14-élösszefüggő, minden csúcs foka legalább 14. 2 pont

Legyen e_1, e_2, \dots, e_m egy maximális független élhalmaz. Ha $m \geq 8$, akkor készen vagyunk. 2 pont

Tegyük fel, hogy $m \leq 7$. Legyen $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}$ e_1, e_2, \dots, e_m végpontjainak a halmaza és legyen U a többi csúcs halmaza. Mivel e_1, e_2, \dots, e_m egy maximális független élhalmaz, U -n belül nem fut él (vagyis független halmaz). 2 pont

Tehát minden $u \in U$ csúcsnak az összes, legalább 14 szomszédja V -ben van. Ebből azonnal következik, hogy $2m \geq 14$, $m \geq 7$, tehát $m = 7$. Ezért $|V| = 14$, $|U| = 2002$. 1 pont

Ekkor viszont minden U -beli pontnak az összes V -beli pont a szomszédja, vagyis V és U között minden él be van húzva. 2 pont

Ebben az esetben viszont könnyedén kiválaszthatunk 8 független élet, sőt, 14-et is: vegyünk egy V -t lefedő párosítást. 1 pont

Második megoldás: ($\nu(G) \geq 14$ -et bizonyítunk)

Mivel G 14-élösszefüggő, minden csúcs foka legalább 14. 2 pont

Legyen e_1, e_2, \dots, e_m egy maximális független élhalmaz. Ha $m \geq 14$, akkor készen vagyunk. 2 pont

Tegyük fel, hogy $m \leq 13$. Legyen $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}$ e_1, e_2, \dots, e_m végpontjainak a halmaza és legyen U a többi csúcs halmaza. $|V| = 2m \leq 26$, tehát $|U| \geq 1990$. Mivel e_1, e_2, \dots, e_m egy maximális független élhalmaz, U -n belül nem fut él (vagyis független halmaz). 2 pont

Tehát minden $u \in U$ csúcsnak az összes, legalább 14 szomszédja V -ben van. Válasszunk U -ból 14 pontot, vagyis legyen $U' \subset U$, $|U'| = 14$. 1 pont

Tekintsük a H páros gráfot, amelynek két osztálya V és U' , $v \in V$ és $u \in U'$ össze van kötve H -ban akkor és csak akkor, ha össze vannak kötve G -ben. 1 pont

Azt állítjuk, hogy teljesül a Hall feltétel, vagyis minden $X \subseteq U'$ esetén $|N(X)| \geq |X|$. Ez azért van, mert a fentiek szerint minden X -re $|N(X)| \geq 14$, viszont $|X| \leq |U'| = 14$. Tehát a Hall tétel alapján van H -ban, így G -ben is, U' -t lefedő párosítás, ami 14 független él. Tehát $\nu(G) \geq 14$. 2 pont

2. A G gráf csúcsai $u, v_1, v_2, \dots, v_{24}$, v_i és v_j pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i - j| = 1, 2, 22, 23$, u és v_i pedig pontosan akkor, ha i osztható 4-gyel. Határozzuk meg $\chi(G)$ -t.

Először belátjuk, hogy $\chi(G) \geq 4$. Próbáljuk meg G -t kiszínezni a piros, fehér, zöld színekkel. A v_1, v_2, v_3 csúcsok össze vannak kötve, ezért különböző színűek, feltehetjük, hogy v_1 piros, v_2 fehér, v_3 zöld. 2 pont

Mivel bármely három szomszédos csúcs össze van kötve, csak egyféleképpen, periodikusan folytathatjuk a színezést: v_4 piros, v_5 fehér, ... v_{24} zöld. Vagyis v_i piros, ha $i = 3k + 1$, fehér, ha $i = 3k + 2$, zöld, ha $i = 3k$. 4 pont

De ekkor u -nak lesz mindhárom színű szomszédja: v_4 piros, v_8 fehér, v_{12} zöld. Vagyis szükségünk van egy negyedik színre, $\chi(G) \geq 4$. 1 pont

Ha viszont v_1, v_2, \dots, v_{24} -et a fenti módon színezzük ki három színnel periodikusan, u -t pedig egy negyedik színnel, az egy jó színezés, ezzel beláttuk, hogy $\chi(G) = 4$. 3 pont

3. Határozzuk meg az olyan 10 csúcú G gráfok maximális élszámát, amelyekre $\tau(G) = 4$ és $\chi(G) = 5$.

Legyenek G csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{10} . Tudjuk, hogy közülük 4 lefogja az összes élet, legyenek ezek v_1, v_2, v_3, v_4 . 1 pont

A maximális élszámú gráfot a v_1, v_2, \dots, v_{10} csúcsokon, azzal a feltétellel, hogy v_1, v_2, v_3, v_4 egy lefogó pont-halmaz, úgy kapjuk, hogy behúzzuk az összes élet, ami a v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsokra illeszkedik. Legyen ez a gráf H . 3 pont

A H gráfnak természetesen van négy lefogó pontja, v_1, v_2, v_3, v_4 , ugyanakkor van négy független éle is, például $v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8$, tehát $\tau(H) = 4$. 2 pont

Ugyanakkor a kromatikus száma, $\chi(H) = 5$, mert egyrészt v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 egy teljes 5 csúcú gráfot alkot, másrészt, ha v_1 zöld, v_2 kék, v_3 sárga, v_4 piros, a többi csúcs fekete, az egy jó 5-színezés. 2 pont

A H gráfnak $6 + 4 \cdot 6 = 30$ éle van, tehát a válasz 30. 2 pont

4. G egy egyszerű páros gráf A és B osztályokkal. A csúcsai v_1, \dots, v_n , v_i fokszáma d_i . Tudjuk, hogy minden i -re $d_i \geq i + 1$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges élet kitörölve G -ből, a maradék gráf tartalmaz n független élet.

Hagyjunk el egy élet G -ből, legyen a kapott gráf G' . Ezzel valamelyik A -beli csúcs fokszáma csökkent eggyel. Ha v_i G' -beli fokszámát d'_i -vel jelöljük, akkor tehát minden i -re $d'_i \geq i$. 3 pont

Most belátjuk, hogy G' -ben teljesül a Hall feltétel. Legyen $X \subseteq A$. Legyen v_i X -ben a legnagyobb indexű csúcs, nyilván $i \geq |X|$. Ekkor viszont $|N(X)| \geq d'_i \geq i \geq |X|$. 4 pont

Tehát a Hall tétel alapján van G' -ben A -t lefogó párosítás, vagyis n független él. 3 pont

5. Az 50 csúcú G gráfból bármelyik 5 pontot elhagyva síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 12$.

Hagyjunk el 5 tetszőleges pontot G -ből. Így kapunk egy 45 csúcú G' síkgráfot. 2 pont

A Négyosztály alapon G' kiszínezhető 4 színnel. 3 pont

Valamelyik színosztály legalább 12 csúcsot tartalmaz, különben csak 44 csúcs lehetne. 3 pont

Ezek a csúcsok független halmazt alkotnak G' -ben, mert egyforma színűek. De akkor G -ben is független halmazt alkotnak. Tehát valóban $\alpha(G) \geq 12$. 2 pont

6. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) + 2t(G)$ mennyiség minimumát ha G bármilyen legalább 3 csúcú összefüggő síkbarajzolt egyszerű gráf lehet.

Első megoldás:

Legyen G egy legalább 3 csúcú összefüggő síkbarajzolt gráf, $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. A Euler formula alapján $n - e + t = 2$. 3 pont

Legyen $M(G) = e(G) - n(G) + 2t(G)$. Ekkor tehát $M + 2 = e - n + 2t + n - e + t = 3t$. 3 pont

Tehát a $3t$ mennyiséget akarjuk minimalizálni a legalább 3 csúcú összefüggő síkbarajzolt gráfokra. Nyilván $t \geq 1$, és ha G fa, akkor t valóban 1. Tehát $M + 2$ minimuma 3, ezért M minimuma 1. 4 pont

Második megoldás:

Legyen G egy legalább 3 csúcú összefüggő síkbarajzolt gráf, $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Az $M(G) = e(G) - n(G) + 2t(G)$ mennyiséget szeretnénk minimalizálni. 1 pont

Ha G -ben van kör, akkor annak egy élét elvéve a kapott gráf továbbra is összefüggő síkbarajzolt gráf lesz, n nem változik, e eggyel csökken, és t is eggyel csökken (az elvett él két oldalán eddig különböző tartományok voltak, most összeolvadtak) tehát M hárommal csökken. 4 pont

Tehát ezt a műveletet kell folytatni, amíg van kör a gráfban. Ezután már nem vehetünk el további élt, tehát (adott csúcsszám mellett) M akkor minimális, ha G fa. 3 pont

Ekkor $e = n - 1$, $t = 1$, ezért $M = 1$, ami független a csúcsok számától. 2 pont