

Kombinatorika és gráfelmélet I
1. ZH, 2016. március 30, 14.15-15.45, E 505
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végig gondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon ($n \geq 3$), amelyben v_1 és v_2 szomszédos és $d_1 + d_2 = 3$? (d_i a v_i csúcs fokszáma)

Első megoldás:

Egy fában minden csúcs foka legalább 1. Ezért ha $d_1 + d_2 = 3$, akkor az egyikük 1, a másikuk 2. 2 pont

Ha $d_1 = 1$ és $d_2 = 2$, akkor, mivel v_1 és v_2 szomszédosak, v_1 egy levél, amelynek egyetlen szomszédja v_2 , v_2 -nek pedig v_1 -en kívül egy szomszédja van. Ha tehát v_1 -et és v_2 -t elhagyjuk, egy fát kapunk a v_3, \dots, v_n csúcsokon amelyhez tetszőleges csúcson illeszkedhet v_2 . 4 pont

A Cayley tétel szerint a v_3, \dots, v_n csúcsokon $(n-2)^{n-4}$ fa van, ehhez v_2 $n-2$ -féleképpen csatlakozhat, tehát összesen $(n-2)^{n-3}$ ilyen fa van. Ugyanennyi olyan fa van, ahol $d_1 = 2$ és $d_2 = 1$, tehát összesen $2(n-2)^{n-3}$ fa van, amely megfelel a feladat feltételeinek. 4 pont

Második megoldás:

Egy fában minden csúcs foka legalább 1. Ezért ha $d_1 + d_2 = 3$, akkor az egyikük 1, a másikuk 2. 2 pont

Ha $d_1 = 1$ és $d_2 = 2$, akkor, mivel v_1 és v_2 szomszédosak, v_1 egy levél, amelynek egyetlen szomszédja v_2 , v_2 -nek pedig v_1 -en kívül egy szomszédja van. 2 pont

Az ilyen fáknek megfelelő Prüfer kódok pontosan azok, amelyekben nincs 1-es, hiszen $d_1 = 1$, az első számjegye a 2-es, mert v_1 és v_2 szomszédosak, és több 2-es nincs benne, mert $d_2 = 2$. Ilyen kódból $(n-2)^{n-3}$ darab van. Szimmetria miatt azokból a megfelelő fákból, amelyekben $d_1 = 2$ és $d_2 = 1$ ugyanennyi van, tehát a válasz $2(n-2)^{n-3}$.

(Vagy: ugyanígy érvelve mint az előbb, az olyan, a feltételeknek megfelelő fának, ahol $d_1 = 2$ és $d_2 = 1$, pontosan azok a Prüfer kódok felelnek meg, amelyekben nincs 2-es, az első számjegye az 1-es, és több 1-es nincs benne. Ilyen kódból ugyancsak $(n-2)^{n-3}$ darab van, tehát a válasz $2(n-2)^{n-3}$.) 6 pont

2. Maximálisan hány éle lehet egy 100 csúcsú egyszerű gráfnak, amelyben van Euler út (séta)? (Adjunk is meg egy ilyen legtöbb élű gráfot!)

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler út, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszáma páros, kivéve legfeljebb kettőt. 1 pont

Mivel a fokszámok összege az élek számának a kétszerese, a fokszámok összegét kell maximalizálnunk. 1 pont

Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legfeljebb 99, ami viszont páratlan. Tehát 98 csúcs fokszáma legfeljebb 98, két csúcsé legfeljebb 99. 4 pont

Ez viszont el is érhető: hagyjunk el a teljes 100 csúcsú gráfból 49 független (közös végponttal nem rendelkező) élet. 3 pont

Ez a gráf összefüggő, minden foka páros, kivéve kettőt, és $\binom{100}{2} - 49 = 4901$ éle van. 1 pont

3. Legyen $n \geq 6$. A G n csúcsú gráf komplementerében, \overline{G} -ben, semelyik három csúcsnak sincs közös szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van Hamilton kör.

Tegyük fel, hogy \overline{G} -ben a v csúcs fokszáma legalább 3. Ebben az esetben v három szomszédjának lenne közös szomszédja, éppen v . 6 pont

Tehát \overline{G} -ben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2, ezért G -ben minden csúcs fokszáma legalább $n - 3$. 2 pont
Viszont $n - 3 \geq n/2$ mert $n \geq 6$, tehát a Dirac tétel szerint G -ben van Hamilton kör. 2 pont

4. A K_n teljes n csúcsú gráf ($n \geq 4$) élein pozitív súlyok vannak, minden súly különböző. Bizonyítsuk be, hogy a második legnagyobb súlyú él nem lehet benne K_n minimális összsúlyú feszítőfájában.

Legyen F a minimális összsúlyú feszítőfa, és tegyük fel, hogy e , a második legnagyobb súlyú él, benne van F -ben. Hagyjuk el e -t F -ből. Ekkor két komponenst kapunk, legyenek ezek F_1 és F_2 . Legyen n_1 illetve n_2 F_1 illetve F_2 csúcsainak a száma. 3 pont

Teszőleges, F_1 és F_2 közti élet hozzáadva $F_1 \cup F_2$ -höz, újra egy feszítőfát kapunk, és összesen $n_1 n_2$ ilyen él van, ezek közül az egyik e . 3 pont

Mivel $n = n_1 + n_2 \geq 4$, $n_1, n_2 \geq 1$ ezért $n_1 n_2 \geq 3$. Ebből következik, hogy ezek között az élek között van egy olyan e' él, amely nem a legnagyobb és nem a második legnagyobb súlyú él. 2 pont

Az $F' = F_1 \cup F_2 \cup \{e'\}$ feszítőfa összsúlya kisebb, mint F összsúlya, hiszen, e' súlya kisebb, mint e súlya. Ez ellentmond F minimalitásának, vagyis a feltevésünk, hogy $e \in F$, hamis. Ezzel beláttuk a feladat állítását. 2 pont

5. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagysága 100. Vonjunk le minden él kapacitásából 1-et, így kapjuk a $(G, s, t, c - 1)$ hálózatot, amelyben a maximális folyam nagysága 50. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti (G, s, t, c) hálózatban van olyan él, amelynek a kapacitása legfeljebb 2.

Első megoldás:

Mivel a $(G, s, t, c - 1)$ hálózatban a maximális folyam nagysága 50, ezért (a Ford-Fulkerson tétel alapján) van benne egy 50 kapacitású (S, T) vágás. 3 pont

Tegyük fel, hogy az (S, T) vágásban k darab S -ből T -be utató él van. Ezek kapacitásainak az összege természetesen 50. Ekkor az eredeti (G, s, t, c) hálózatban ezen élek kapacitásainak az összege $50 + k$, vagyis ennyi a (G, s, t, c) hálózatban az (S, T) vágás kapacitása. 3 pont

De a feltétel szerint $50 + k \geq 100$, ezért $k \geq 50$. Visszatérve a $(G, s, t, c - 1)$ hálózatra, ezek szerint az (S, T) vágásban $k \geq 50$ darab él kapacitásának az összege 50, vagyis valamelyiknek a kapacitása legfeljebb 1. Ennek az élnek az eredeti (G, s, t, c) hálózatban a kapacitása legfeljebb 2. 4 pont

Második megoldás:

Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban minden él kapacitása nagyobb, mint 2. 2 pont

Tekintsük a $(G, s, t, c/2)$ hálózatot, tehát felezzük meg minden él kapacitását. Mivel (G, s, t, c) -ben a maximális folyam nagysága 100, $(G, s, t, c/2)$ -ben 50. (Minden vágás kapacitása feleződött, így a minimális vágás kapacitása 50. Ami egyenlő a max folyam nagyságával a Ford-Fulkerson tétel szerint.) 4 pont

Feltevésünk szerint minden e élre $c(e) > 2$, tehát $c(e)/2 > c(e) - 1$. Vagyis a $(G, s, t, c - 1)$ hálózatban minden él kapacitása nagyobb, mint a $(G, s, t, c/2)$ hálózatban. Ezért $(G, s, t, c - 1)$ minden vágásának a kapacitása is nagyobb, mint a megfelelő vágásé $(G, s, t, c/2)$ -ben. Tehát a maximális folyam nagysága $(G, s, t, c - 1)$ -ben nagyobb, mint 50, ami ellentmondás! Vagyis a feltevésünk hamis, ezzel beláttuk az állítást. 4 pont

6. A G 100 csúcsú gráfban minden csúcs foka legalább 2. Hagyjunk el minden lehetséges módon két élet. Azt látjuk, hogy 60 esetben a kapott gráf nem lesz összefüggő, az összes többi esetben igen. Bizonyítsuk be, hogy G élösszefüggőségi száma, $\lambda(G) = 2$.

A feltétel szerint létezik olyan él pár (sőt, 60 darab ilyen pár is van) amelyet elhagyva G több komponensre esik szét. Tehát $\lambda(G) \leq 2$. 3 pont

Tegyük fel, hogy $\lambda(G) \leq 1$. Ebben az esetben van olyan e él, amelyet elhagyva G -ből a kapott gráf nem összefüggő. 3 pont

Mivel minden csúcs foka legalább 2, G -nek legalább 100 éle van. Tehát e -n kívül van még legalább 99 él, vagyis legalább 99 (e, e') élpár van, amelyek elhagyásával a kapott gráf nem lesz összefüggő. Mivel a feltétel szerint csak 60 ilyen élpár lehet, ellentmondásra jutottunk, tehát $\lambda(G) = 2$. 4 pont

Ilyen gráf tényleg van, de ez nem volt része a feladatnak.