

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2016. április 19.

Csúcsszínezés, élszínezés

$\chi(G)$: G kromatikus száma, G csúcsainak a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két összekötött pont különböző színű.)

$\Delta(G)$: maximális fokszám G -ben. $\omega(G)$: G klikkszáma, a legnagyobb teljes részgráf mérete.

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Brooks tétel: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

gyenge Brooks tétel: Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Mycielski tétel: Minden pozitív egész k ra létezik olyan G_k gráf, melyre $\omega(G_k) = 2$, és $\chi(G_k) = k$.

$L(G)$: G élgráfja, csúcsai G éleinek felelnek meg, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő éleknek G -ben van közös végpontja.

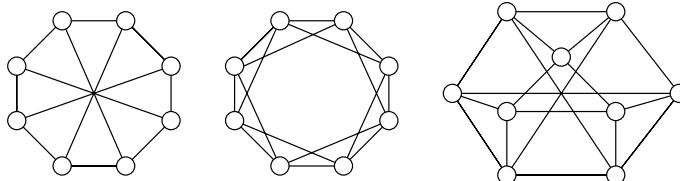
$\chi'(G) = \chi_e(G)$: G élkromatikus száma, G éleinek a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két közös végpontú él különböző színű.) Nyilván $\chi'(G) = \chi_e(G) = \chi(L(G))$.

Minden G gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing tétel: Minden G egyszerű gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

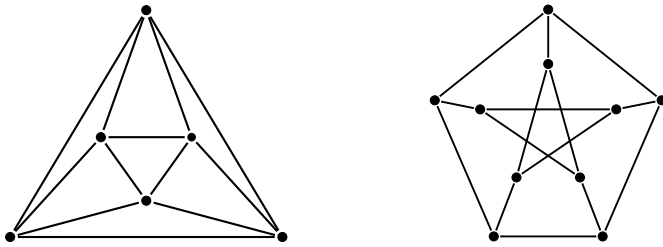
König tétel: Ha G páros gráf, akkor $\Delta(G) = \chi'(G)$.

1. (Zykov konstrukció) Legyen Z_2 a teljes két csúcsú gráf. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a Z_k gráfot. Legyen Z_{k+1} a következő gráf. Vegyük Z_k k darab diszjunkt példányát. Ezek után minden lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot mindegyik példányból, vegyünk fel ehhez a k -ashoz egy új csúcsot, és kössük össze a k -as elemeivel. Biz: minden k -ra $\omega(Z_k) = 2$ és $\chi(Z_k) = k$.
2. (*) Legyen $n > 1$ rögzített. Legyenek G_n csúcsai az (i, j) számpárok, ahol $n \geq i > j \geq 1$. Két csúcs, (i, j) és (a, b) össze van kötve G -ben akkor és csak akkor, ha $j = a$ vagy $i = b$. Biz: minden n -re $\omega(G_n) = 2$ és $\chi(G_n) \geq \log_2 n$.
3. (*) Tegyük fel, hogy az n csúcsú G gráf egyértelműen színezhető 3 színnel, azaz bármely két 3-színezésében ugyanazok a színsztályok. Bizonyítsuk be, hogy G -nek legalább $2n - 3$ éle van.
4. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!



5. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \dots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
6. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
7. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
8. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
9. Mutassunk olyan G gráfot, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel.
10. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésében bármely színsztály-nak van olyan v csúcsa, hogy v -nek minden más színsztályban van szomszédja.
11. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.

12. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G -ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
13. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
14. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
15. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
16. Tekintsük a sík egyenesének egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakk-táblaszerűen kiszínezhetőek.
17. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetőek úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
18. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler körsétát, és melyeknek van Hamilton körük?
19. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r -reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágo pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.
20. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
21. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.
22. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.
23. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
24. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



Házi feladatok

1. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráf, melyben van elvágo él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.
2. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színsztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?