Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2016. április 12.

Hall, görög betűk, Kőnig, Gallai, kromatikus szám

Tudnivalók

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

Frobenius tétel: Legyenek A és B a G páros gráf színosztályai. Pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Hall Tétel: Pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

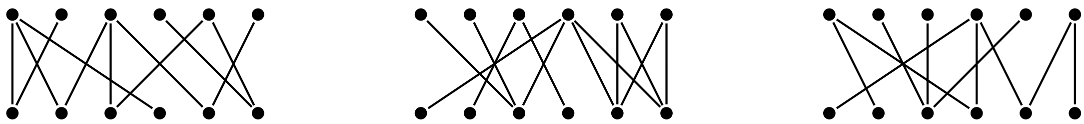
Tutte tétel: A G véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges X csúcshalmazra $G - X$-nek legfeljebb $|X|$ páratlan komponense van: $c_p(G - X) \leq |X| \;\; \forall X \subseteq V$ esetén.

	max fuggetlen	min lefogo	Konig, ps graf	
pont	α	+ τ	$=n$	Gallai nincs hurokel
el	ν	+ ρ	$=n$	Gallai nincs iz pont
			Konig ps graf, nincs iz pont	

A G gráf *kromatikus száma*, $\chi(G) = k$ ha G kiszínezhető k színnel (úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapnak), de $(k-1)$-gyel nem. A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G gráf *klikkszáma*, $\omega(G)$, a legnagyobb klikkjének mérete. $\Delta(G)$ a maximális fokszám. Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

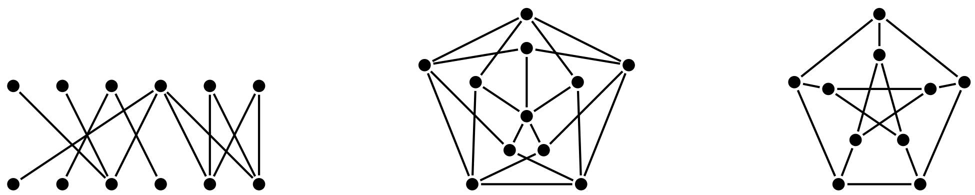
Feladatok:

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.

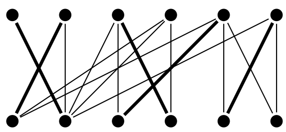


2. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.
4. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
5. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
6. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.

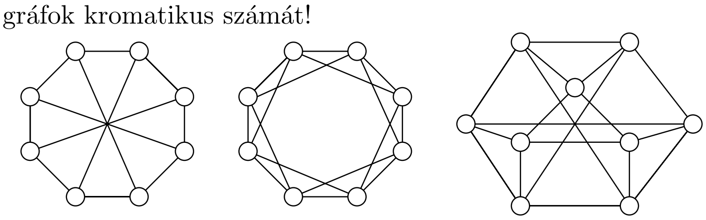
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
10. Mutassuk meg, hogy ha G olyan $(n-1)$-öf, $2n$ csúcsú gráf, amire $\tau(G) \geq n$, akkor G-nek van teljes párosítása.
11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
12. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
13. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
14. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



15. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i+j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.
16. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



17. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n-1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.
18. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.
19. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.
20. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!



21. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
22. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i-j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
23. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

Házi feladat

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
2. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n-1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?