

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2016. április 5.

*Hall, Frobenius, (görög betűk, König, Gallai)*

## Tudnivalók

$\alpha(G)$ : független pontok maximális száma;  $\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$ : független élek maximális száma;  $\rho(G)$ : lefogó élek minimális száma.

**König tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ . (b) Ha  $G$  páros és nincs izolált pontja, akkor  $\alpha(G) = \rho(G)$ .

**Gallai tétel:** (a) Ha  $G$ -ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\tau(G) + \alpha(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma. (b) Ha  $G$ -ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\nu(G) + \rho(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma.

Ha  $X$  a  $G = (V, E)$  gráf csúcsainak részhalmaza akkor  $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$  az  $X$  halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

**Frobenius tétel:** Legyenek  $A$  és  $B$  a  $G$  páros gráf színsztályai. Pontosan akkor létezik  $G$ -nek teljes párosítása, ha  $|A| = |B|$  és az  $A$  színsztály pontjainak tetszőleges  $X$  részhalmazára  $|X| \leq |N(X)|$ .

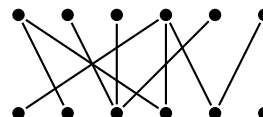
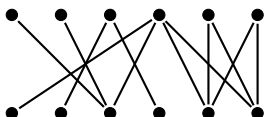
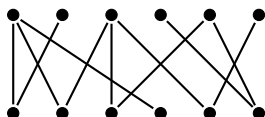
**Hall Tétel:** Pontosan akkor létezik  $G$ -nek  $A$ -t fedő párosítása, ha az  $A$  színsztály pontjainak tetszőleges  $X$  részhalmazára  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Tutte tétel:** A  $G$  véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges  $X$  csúcshalmazra  $G - X$ -nek legfeljebb  $|X|$  páratlan komponense van:  $c_p(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$  esetén.

	max független	min lefogo	König, ps graf	
pont	$\alpha$	+	$\tau$	$=n$ Gallai nincs hurokel
		✖		
el	$\nu$	+	$\rho$	$=n$ Gallai nincs iz pont
			König ps graf, nincs iz pont	

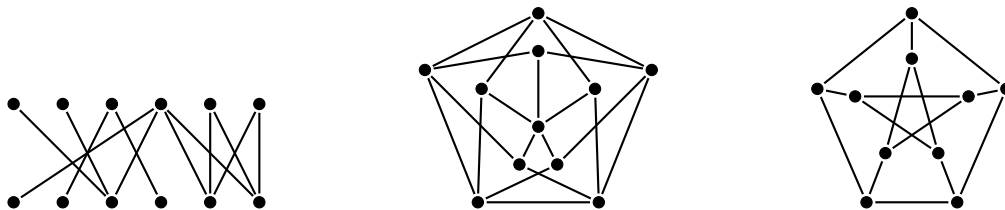
## Feladatok:

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.

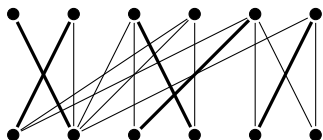


2. Adott  $n$  fiú és  $n$  lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  páros gráf összefüggő és az  $A$  osztályában a fokszámok különbözők, akkor  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása.
4. Egy kiránduláson  $n$  házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább  $n$  fajtát szeret a  $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
5. A  $G$  irányított gráf minden csúcsából  $k$  él indul és  $k$  él érkezik. Igaz-e, hogy  $G$ -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek  $G$  minden csúcsán áthaladnak?
6. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. Bizonyítsuk be, hogy minden véges  $G$  gráfra  $2\nu(G) \geq \tau(G)$  teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdulhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
10. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  olyan  $(n - 1)$ -öf,  $2n$  csúcsú gráf, amire  $\tau(G) \geq n$ , akkor  $G$ -nek van teljes párosítása.
11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges  $G$  gráf mindazon élei, amik  $G$  valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
12. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
13. Adott egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan  $k$  darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható  $n$  darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
14. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\alpha(G)$  értékeket!



15. Legyen  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg az alábbi gráfokra  $\alpha(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\tau(G)$  értékeit.
16. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



### Házi feladat

1. Minden  $k$ -ra konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan  $k$  db különböző teljes párosítása van.
2. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű  $G$  gráfnak  $X$  egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek  $x, y$  és  $z$  különböző  $X$ -beli csúcsok. Tartalmazhat-e a  $G + xy + yz + zx$  gráf teljes párosítást?