Kombinatorika és gráfelmélet 1.

5. gyakorlat, 2016. március 22.

Menger tételei, magasabb összefüggőség

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Tetszőleges $1 < \kappa < \lambda$ pozitív egészekre konstruáljunk G gráfot, amire $\lambda(G) = \lambda$ és $\kappa(G) = \kappa$.
3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\lambda(K_n)$ ill. $\kappa(K_n)$ élösszefüggőségi ill. pontösszefüggőségi számát. Ugyanez a kérdés a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra.
4. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy $\kappa(G) = 3$.
5. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élöf legyen?
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n csúcsú k-öf gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges gráf esetén $\delta(G) \geq \lambda(G) \geq \kappa(G)$ teljesül.
8. Mutassuk meg, hogy ha a G egyszerű gráf pontosan akkor 2-öf ha bármely két csúcsára található olyan kör G-ben, amely ezen csúcsokat tartalmazza. Igazoljuk, hogy ha egy izolált pontot nem tartalmazó, egyszerű G gráf pontosan akkor 2-öf, ha G bármely két élén keresztül vezet G-nek köre.
9. Tegyük fel, hogy a G gráf k-öf. Vegyünk fel egy új x pontot, és kössük össze G három különböző pontjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf is k-öf!
10. Igazoljuk Dirac tételét: ha $\kappa(G) \geq k \geq 2$, akkor G bármely k pontjához található G-nek olyan köre, amely mind a k pontot tartalmazza.
11. Mutassuk meg, hogy a 2-öf ill. 2-élöf gráfoknak van fülfelbontása. Azaz, a 2-öf gráfok pontosan azok, amelyek felépíthetők egyetlen csúcsból fülek egymás utáni hozzáadásával. Itt minden fül a már felépített félkész gráf két különböző csúcsa közti olyan út, amelynek belső csúcsai nem szerepelnek az eddig felépített gráfban. A 2-élöf gráfok fülfelbontására hasonló igaz, megengedve, hogy egy fülnek a két vége ugyanaz a csúcs legyen. (Irányított gráfokra hogyan terjeszthetők ki ezek az állítások?)
12. Igazoljuk, hogy tetszőlges G véges, irányítatlan gráfnak pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása (azaz olyan, amelyre bármely két csúcs között mindkét irányba van irányított út), ha G kéteszeresen élösszefüggő.
13. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.
14. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_1)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_1)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)
15. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok, és $V(G) = A \cup B \cup C$ a G gráf csúcshalmaza, valamint legyen $uv \in E(G)$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora $\kappa(G)$?
16. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.
17. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?
18. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?

Házi feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha a G gráf 2016-pontú és 13-öf, akkor G bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 155-élű út.
2. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-öf!