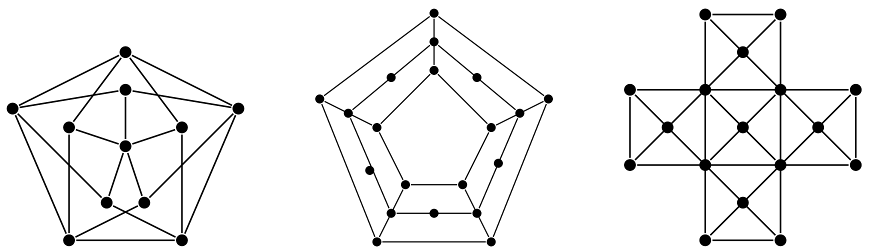
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

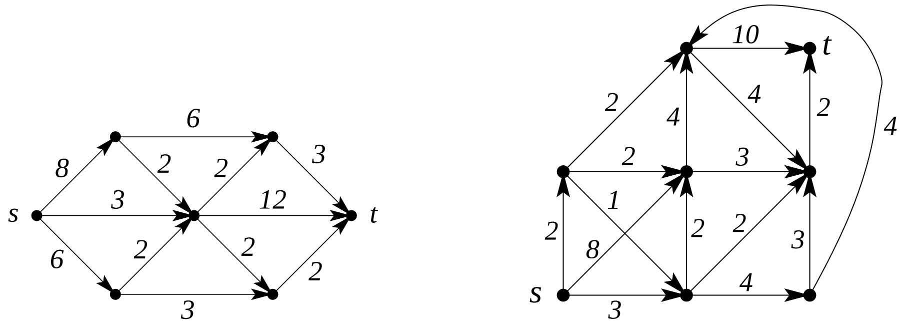
4. gyakorlat, 2016. március 8.

Hamilton-kör, Hamilton-út, folyamok

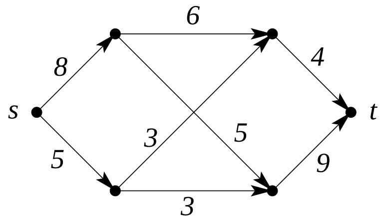
1. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?
2. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
4. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.
5. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.
6. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!
7. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?
8. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \dots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?
9. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
10. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
    (a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
    (b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
    (c) G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$.
11. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?

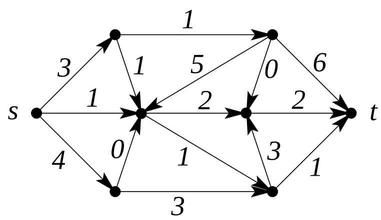


12. Legalább hány éle van egy olyan hat (n) pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
13. Legfeljebb hány éle lehet egy hat (n) csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?
14. Adjunk meg egy-egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.

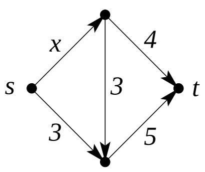


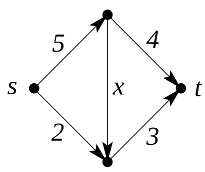
15. a) Az előző feladat hálózataiban válasszuk valamelyik él kapacitását a feltüntetett helyett c-nek, és határozzuk meg, hogyan függ a maximális folyamnagyság a c kapacitás értékétől.
b) Szintén az előző feladat hálózatait tekintve döntsük el, melyik élt kellene a gráfban törölni ahhoz, hogy a létrejövő hálózatban a maximális folyam nagysága a lehető legkisebb legyen.
16. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, c) hálózatban az s-t tartalmazó, t-től diszjunkt X és az Y ponthalmazok mindegyike minimális kapacitású st-vágást határoz meg. Mutassuk meg, hogy az $X \cap Y$ és $X \cup Y$ ponthalmazokhoz is minimális kapacitású st-vágás tartozik.
17. Igaz-e, hogy minden hálózatban van olyan e él, amelynek a kapacitását ε-nal csökkentve (ahol $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$) a maximális folyamnagyság is ε-nal csökken?
Igaz-e az, hogy minden hálózatban van olyan e él amihez létezik egy pozitív ε mennyiség úgy, hogy ha e kapacitását ε-nal növeljük (ahol $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$), akkor a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik?
Ha a fenti állítások valamelyike nem igaz, akkor hogyan lehet eldönteni egy adott hálózatban, hogy létezik-e olyan él, ami rendelkezik a kérdésben leírt tulajdonsággal?
18. Adott a D irányított gráf valamint D élein a c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw folyam.
19. Határozzuk meg a maximális folyam értékét az alábbi hálózatokban!

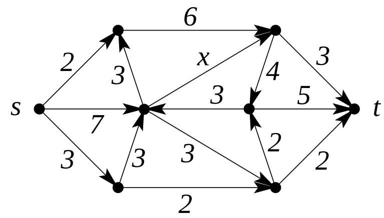




20. Határozzuk meg a nemnegatív x függvényében a maximális folyam értékét az alábbi hálózatokban!







21. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris feszítő részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris feszítő részgráfja?
(Egy gráfot k-*regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k. Egy részgráfot *feszítő részgráfnak* nevezünk, ha az eredeti gráf összes pontját tartalmazza.)
2. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.
3. Irányítsuk a kocka élhálózatának éleit az s csúcsból az átellenes t csúcs felé. Hogyan kell a kiosztani a 12 él közt 4 db 1-es, 2-es ill. 3-as kapacitást, hogy a kapott hálózatban a maximális folyamnagyság a lehető legnagyobb legyen?