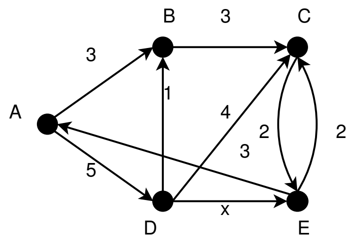
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

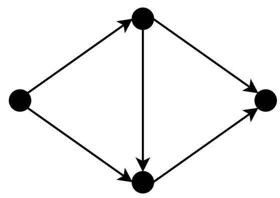
12. gyakorlat, 2016. május 9.

*L*egrövidebb utak, szélességi, mélységi keresés

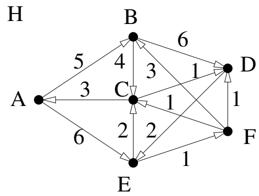
1. [**ZH: 2009. április 24.**] Dijsktra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében.



2. Határozzuk meg a következő gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!



3. Határozza meg az A csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát H-ban a Dijkstra-algoritmussal! Mely élekre igaz, hogy az él súlyát 1-el csökkentve nem változnak meg az A-tól mért távolságok?



4. Egy gráf minden szélességi feszítőfája (irányítatlan gráfként nézve) csillag. Mit mondhatunk a gráfról?
5. Van 12 darab edény, egyenként $100, 97, 27, 47, 55, 201, 258, 1000, 984, 766, 591, 631$ liter űrtartalmúak. Kezdetben az 1000 literes edény tele van, az összes többi üres. Egy megengedett lépés a következő: egy edény teljes tartalmát áttöltjük egy másik edénybe vagy pedig egy edényt egy másikból teljesen feltöltünk. Adjunk algoritmust, ami eldönti, hogy elérhető-e megengedett lépések sorozatával az az állapot, amikor a felsorolásban szereplő első nyolc edényben $25 - 25$ liter, a többiben pedig $200 - 200$ liter folyadék van, és amennyiben igen, megadja az ehhez szükséges lépések minimális számát.
6. Hogyan járja be a BFS (*breadth-first-search*) a K_n és a $K_{n,n}$ gráfokat?
7. Legfeljebb hány komponensből állhat egy irányított gráf szélességi bejárása során keletkező erdő?
8. Éllistával adott a súlyozott élű $G(V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az $1, 2, 3$ számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására!
9. Éllistával adott egy G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \leq i \leq k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!\,(e + n))$.
10. Egy $n \times n$-es sakktábla néhány mezőjén az ellenfél egy huszárja (lova) áll. Ha mi olyan mezőre lépünk, ahol az ellenfél le tud ütni, akkor le is üt, de egyébként az ellenfél nem lép. Valamelyik mezőn viszont a mi huszárunk áll. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy mely másik mezőkre tudunk (lólépések sorozatával) eljutni a nélkül, hogy az ellenfél leütne!
11. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága, nem azon múlik, merről érkezik oda és és merre akar rajta áthaladni.) Írjon le egy algoritmust, amivel meg

lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén legyen $O(n + e)$, ahol n a csúcsok és e az élek száma.

12. Adjunk algoritmust, mely egy éllistával megadott irányítatlan gráfban vagy talál egy kört, vagy igazolja a gráf körmentességét $O(|V|)$ időben (függetlenül attól, hogy $|E|$ akár sokkal nagyobb is lehet, mint $|V|$)!
13. Vidéken autózunk, ahol benzinkút csak bizonyos falvakban van. Az A falubeli benzinkúttól indulunk és a B faluba akarunk elérni (ahol szintén van benzinkút). A falvak közötti utakat egy n csúcsú e élű, összefüggő, irányítatlan gráf írja le, melynek csúcsai a falvak, az élek pedig a falvak közötti utakat jelentik, egy él súlya a két falut összekötő útszakasz hossza. A gráf az éllistájával adott, és ezen kívül adott még az a k falu, amelyben van benzinkút. Adjon $O(ke \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az A-ból B-be vivő legrövidebb olyan útvonalat, melynek során soha nem kell 600 kilométernél többet autóznunk két benzinkút között. (ZH 2006. ápr. 7.)
14. Adj $O(n^4)$ futási idejű algoritmust, amely egy mátrix segítségével adott n pontú irányítatlan, nemnegatív élsúlyokkal ellátott gráfban megtalálja a legrövidebb összhosszúságú kört (ami egy ponton nem mehet át kétszer).
15. Milyen feszítőfát kapunk a $G = K_n$ gráf mélységi bejárása esetén?
    És ha $G = K_{n,m}$?
16. [ZH 2006. 04. 07./3] Legyen G egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
    (a) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben f egy faél?
    (b) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben f egy faél?
    (c) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél?
    (d) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?
17. Egy irányított G gráfban hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket. A maradék gráfban ismét hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket, ezt ismételjük, amig lehet. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor kapunk üres gráfot, ha G-ben nincs irányított kör!
18. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását. [ZH 2005. 04. 08./5]