Kombinatorika és gráfelmélet 1.

11. gyakorlat, 2016. május 2.

*S*íkgráfok, összefoglaló. Jön a ZH!!

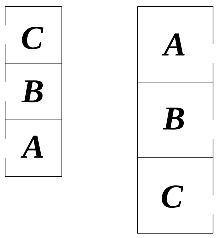
2. ZH: május 6, péntek, 2-4 E 505

1. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
2. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság és az egyszerűség megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt, egyszerű, és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.

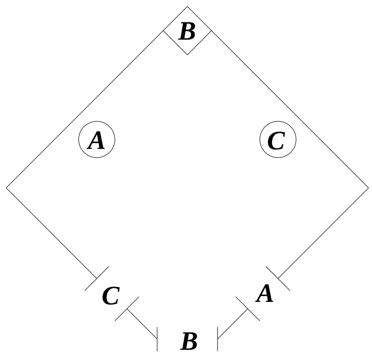
   Mutassunk olyan síkbarajzolt, NEM egyszerű gráfot, amelynek minden lapja háromszög, de nem 3-összefüggő.
3. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
4. (Hanani-Tutte tétel) (*) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!
5. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

   Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakastól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

   b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?



1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

6. (múlt heti házi) Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

7. (múlt heti házi) Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + 2e(G) - t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2016 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

1. ZH, 2015. március 16. 10.15-11.45, E 505.

2. Tegyük fel, hogy G egy egyszerű, legalább 7 csúcsú gráf és bármelyik két csúcsát (és a rájuk illeszkedő éleket) elhagyva síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy G kromatikus száma $\chi(G) \leq 5$.

3. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek $F_1, F_2, \ldots, F_t$ a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról F_i–t határolja, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg az

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1) + \sum_{i=1}^{n} d_i$$

mennyiség maximumát és minimumát, ha G tetszőleges $n = 100$ csúcsú, egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.

2. Aláíráspótló ZH, 2014. december 17. 8.15-9.45, IB 134

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\kappa(G)$: pontösszefüggőségi szám, $\lambda(G)$: élösszefüggőségi szám.

Definíció. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, $k > 0$ egész. A kG gráf csúcsai v_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, a v_{ij} és $v_{i'j'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve éllel kG-ben, ha $i = i'$, vagy ha v_i és $v_{i'}$ össze vannak kötve G-ben. Vagyis úgy kapjuk a kG gráfot G-ből, hogy G minden csúcsát helyettesítjük k csúccsal, két új csúcs akkor és csak akkor van összekötve kG-ben, ha ugyanabból a G-beli csúcsból származnak, vagy ha a megfelelő két G-beli csúcs össze volt kötve G-ben.

1. Legyen G egy egyszerű gráf, Tegyük fel, hogy $\kappa(G)$, G pontösszefüggőségi száma 3. Bizonyítsuk be, hogy $\kappa(3G) = 9$.

2. Legyen $G = C_7$, a 7 hosszú kör. Bizonyítsuk be, hogy $7 \leq \chi(3G) \leq 8$.

3. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfra $\nu(G) = 3$ és $\chi(G) = 7$. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(G) \geq 6$.

4. Legyen G egy páros gráf A, B osztályokkal. Tegyük fel, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X| - 1$. ($N(X)$ az X-hez tartozó csúcsok szomszédainak halmaza) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van olyan párosítás, amely A-t egy csúcs kivételével lefedi.

5. A G gráfról tudjuk, hogy élösszefüggőségi száma, $\lambda(G) = 2$. Ha a v csúcsot elhagyjuk G-ből, akkor a kapott $G \setminus \{v\}$ gráf pontosan három összefüggő komponensből áll. Bizonyítsuk be, hogy v foka, $d_v \geq 6$.

6. A G egyszerű gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots v_{15}$ és $u_1, u_2, \ldots, u_{15}$. A v_i és u_j pontok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha ij osztható 4-gyel. Más él nincs. Határozzuk meg $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.