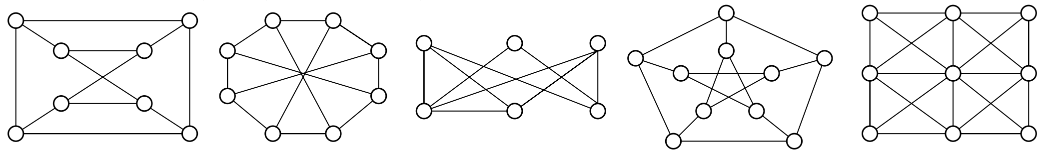
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

10. gyakorlat, 2016. április 26.

*S*íkgráfok

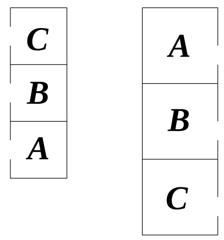
1. Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n-6$ éle van.
2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?
3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G)+e(G)-2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.
4. Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
   a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
   b) ha G-nek $3n-6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
   c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
   d) G-nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
5. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
6. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és $\bar{G}$ egyike biztosan nem síkgráf.
7. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
8. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
9. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g, akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.
10. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
11. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5-e, K_{3,3}-e, \overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?



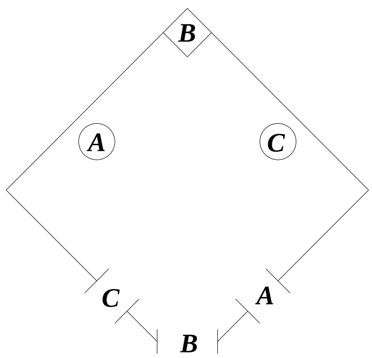
12. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
    a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
    b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
13. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
14. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkereszteződések lehetséges minimális számát. Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke? Mennyi $cr(K_6)$?
15. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.
16. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G-be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
17. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
18. (Hanani-Tutte tétel) (*) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!
19. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakastól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?



1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

Házi feladat.

1. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

2. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G)+2e(G)-t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2016 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.