Kombinatorika és gráfelmélet I

2. ZH, 2014. november 24. 10.15-11.45, E 505

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a felttele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jr. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám.

1. A G gráf csúcsai $v_1, \dots v_5$ és $u_1, \dots, u_5$. Minden i, j-re ($1 \le i, j \le 5$) v_i és u_j össze vannak kötve éllel. A v_i és v_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i - j| = 1$ vagy 4, és ugyanígy az u_i és u_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i - j| = 1$ vagy 4. (Vagyis G két 5 hosszú körből áll, amelyek között egy teljes páros gráf van.) Bizonyítsuk be hogy G pontösszefüggőségi száma, $\kappa(G) = 7$.

Be kell bizonyítanunk, hogy akárhogyan hagyunk el hat pontot G-ből, a megmaradó gráf összefüggő marad, de hét alkalmas pont elhagyásával már el tudjuk érni, hogy a maradék gráf ne legyen összefüggő. 1 pont

Tegyük fel először, hogy úgy hagytunk el néhany pontot a gráfból, hogy az $v_1, \dots v_5$ pontok közül is maradt legalább egy és az $u_1, \dots, u_5$ pontok közül is. Ekkor a megmaradt v_i illetve u_j pontok egy teljes páros gráfot feszítenek, ami összefüggő. 2 pont

Tehát ha azt szeretnénk, hogy a megmaradó gráf ne legyen összefüggő, akkor az egyik osztalyt, mondjuk a $v_1, \dots v_5$ pontokat, mind el kell hagynunk. 1 pont

Ekkor a megmaradó $u_1, \dots, u_5$ pontok egy öt hosszú kört feszítenek, ami még mindig összefüggő. 1 pont

Sőt, ha ebből is elhagyunk egy pontot, a maradék még mindig összefüggő. 2 pont

Viszont ha két nem szomszédos pontot hagyunk el, mondjuk u_1-et és u_3-at, akkor már a megmaradó gráf nem lesz összefüggő. 2 pont

Tehát G pontösszefüggőségi száma, $\kappa(G) = 7$. 1 pont

2. a. Bizonyítsuk be hogy az 1. feladatban szereplő G gráf kromatikus száma 6.
b. Legkevesebb hány élet kell elhagynunk G-ből, hogy a kapott gráf kromatikus száma 5 legyen?

a. A $v_1, \dots v_5$ öt hosszú kör kromatikus száma 3 és ugyanígy az $u_1, \dots, u_5$ öt hosszú kör kromatikus száma is 3. 2 pont

A $v_1, \dots v_5$ illetve az $u_1, \dots, u_5$ pontok között az összes él be van húzva, ezért a $v_1, \dots v_5$ pontok színezéséhez használt színeket egyáltalán nem használhatjuk az $u_1, \dots, u_5$ pontok színezéséhez. 2 pont

Tehát egy jó színezéshez legalább $3 + 3 = 6$ szín kell. 1 pont

Ennyi színnel viszont könnyedén ki tudjuk színezni G-t, három színnel kiszínezzük a $v_1, \dots v_5$ pontokat és másik hárommal az $u_1, \dots, u_5$ pontokat. 1 pont

b. Legalább egy élet biztos, hogy el kell hagyni, mert jelenleg 6 a kromatikus szám. De egy él eleg is, pl hagyjuk el az u_1u_2 élet. Ekkor a $v_1, \dots v_5$ pontokat kiszínezzük 3 színnel, az $u_1, \dots, u_5$ pontok most egy 4 hosszú utat feszítenek, két, az előző háromtól különböző színnel ki tudjuk őket színezni. 4 pont

3. Legyen G egy 100 csúcsú gráf, $\nu(G) = 2$.
a. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \le 5$.
b. Mutassunk minden $n \ge 5$–re olyan n csúcsú G gráfot, amelyre $\nu(G) = 2$ és $\chi(G) = 5$.

Legyen ab és cd két független él G-ben. (Ilyen két él van, mert $\nu(G) = 2$.) 1 pont

Mivel nincs három független él, az a, b, c, d pontoktól különböző 96 pont között nem fut él. 3 pont

Színezzük ki az a, b, c, d pontokat négy különböző színnel, a maradék 96 pontot pedig egy ötödikkel. Ez a fentiek szerint egy jó színezés, tehát $\chi(G) \leq 5$. 3 pont

Legyen G egy K_5 (öt pontú teljes gráf) és $n-5$ izolált pont. Ekkor $\nu(G) = 2$ és $\chi(G) = 5$. 3 pont

4. Legyen G egy páros gráf A, B osztályokkal. Tegyük fel, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq 2|X|$. ($N(X)$ az X-hez tartozó csúcsok szomszédainak halmaza)

a. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van A-t lefedő párosítás.

b. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van két éldiszjunkt A-t lefedő párosítás.

a. Legyen $X \subseteq A$, ekkor $|N(X)| \geq 2|X| \geq |X|$. Tehát teljesül a Hall feltétel, van A-t lefedő párosítás. 3 pont

b. Most hagyjuk el ennek a párosításnak az éleit G-ből. Belátjuk, hogy a kapott gráf, G', tartalmaz A-t lefedő párosítást. 2 pont

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges, és legyen $N'(X)$ az X-hez tartozó csúcsok szomszédainak halmaza G'-ben. 2 pont

Mivel egy A-t lefedő párosítást hagytunk el G-ből, vagyis minden A-beli csúcsból csak egy élt, $|N'(X)| \geq |N(X)| - |X| \geq 2|X| - |X| = |X|$. 2 pont

Tehát G'-ben is teljesül a Hall feltétel, van benne A-t lefedő párosítás. Ezért G-ben van két éldiszjunkt A-t lefedő párosítás is. 1 pont

5. Határozzuk meg, hogy mennyi a 100 csúcsú, 2-élösszefüggő gráfok élszámának a minimuma!

Minden G gráfban $\lambda(G) \leq d_{\min}(G)$ vagyis az élösszefüggőségi szám legfeljebb annyi, mint a legkisebb fokszám. 3 pont

Legyen G egy 100 csúcsú, 2-élösszefüggő gráf, e az élek száma, $d_1, \dots d_{100}$ a fokszámok. A fenti megállapításból következik, hogy minden i-re $d_i \geq 2$. Ezért $2e = d_1 + d_2 + \cdots + d_{100} \geq 200$, vagyis $e \geq 100$. 3 pont

Ugyanakkor a 100 csúcsú körnek éppen 100 éle van és 2-élösszefüggő, hiszen egy tetszőleges él elhagyása után is összefüggő marad. 3 pont

Tehát a 100 csúcsú, 2-élösszefüggő gráfok élszámának a minimuma 100. 1 pont

6. G csúcsai $v_1, v_2, \dots v_n$ és $u_1, u_2, \dots, u_n$. A v_i és u_j pontok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha $i + 1 = j$, vagy $i + j = n + 1$. Határozzuk meg $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.

A $v_1u_2, v_2u_3, \dots, v_{n-1}u_n, v_nu_1$ élek egy teljes párosítást alkotnak G-ben. 3 pont

Tehát $\nu(G) \geq n$. Ugyanakkor a $v_1, v_2, \dots v_n$ (vagy az $u_1, u_2, \dots, u_n$) pontok lefogják az összes élet, tehát $\tau(G) \leq n$, viszont $\nu(G) \leq \tau(G)$, ebből következik, hogy $\nu(G) = \tau(G) = n$. 3 pont

(Ezt lehetett volna egyszerűbben is: abból, hogy a fenti élek *teljes* párosítást alkotnak, azonnal következik hogy $\nu(G) = n$, hiszen több független él nem fér el. A Kőnig tétel alapján ekkor $\tau(G)$ is n.)

A Gallai tétel alapján $\alpha(G) + \tau(G) = 2n$ tehát $\alpha(G) = n$. 2 pont

Vegül pedig akár a Gallai ($\nu(G) + \rho(G) = 2n$) akár a Kőnig ($n = \alpha(G) = \rho(G)$) alapján azt kapjuk, hogy $\rho(G) = n$. 2 pont