Kombinatorika és gráfelmélet I

1. ZH, 2014. október 20. 10.15-11.45, E 505

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a felttele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jr. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_7$ csúcsokon, amelynek nincs másodfokú csúcsa?

Tudjuk, hogy az $n-2$ (jelen esetben 5) hosszú Prüfer kódok egyértelműen meghatározzák a fákat a $v_1, v_2, \ldots$, v_7 csúcsokon és a Prüfer kódban minden csúcs sorszáma eggyel kevesebbszer szerepel, mint amennyi a fokszáma. 2 pont

A feltétel szerint tehát azokat az 5 hosszú sorozatokat kell leszámolnunk, amelyeknek minden tagja egy 1 és 7 közti egész szám és semelyik tag sem szerepel pontosan egyszer. 2 pont

Mivel 5 hosszú a sorozat, ez csak úgy lehetséges, hogy (1) egy tag kétszer szerepel, egy meg háromszor, vagy pedig (2) egy tag ötször. 2 pont

Számoljuk le az ilyen számsorozatokat: (1) azt a tagot, amelyik háromszor szerepel, 7-féleképpen választhatjuk ki, ezután azt, amelyik kétszer, 6-féleképpen. A háromszor szereplő tag $\binom{5}{3} = 10$-féle helyen állhat a sorozatban, és ez mar meghatározza a másik tag két helyét. Tehát $7 \cdot 6 \cdot 10 = 420$ lehetőségünk van. 2 pont

A másik esetben (2) természetesen 7 ilyen számsorozat van. Tehát a válasz $420 + 7 = 427$. 2 pont

2. Legyen $n > 0$, páros. A $2n$ csúcsú G gráf két teljes n csúcsú gráf diszjunkt uniója. Minimálisan hány élet kell hozzáadni G-hez, hogy a kapott gráf egyszerű legyen és legyen Euler köre?

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler kör, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszáma páros. 1 pont

G minden csúcsának a foka $n-1$, ami páratlan. Tehát minden csúcsnak meg kell változtatni a fokszámát. 2 pont

Egy él behúzásával két csúcsnak tudjuk megváltoztatni a fokszámát, ezért legalább $2n/2 = n$ élt be kell húznunk. 3 pont

Ugyanakkor ha behúzunk egy teljes párosítást a két teljes n csúcsú gráf csúcsai közé, akkor éppen n élet húztunk be, a kapott gráf összefüggő és minden fokszáma páros. 3 pont

Tehát a válasz n. 1 pont

3. Legyen $n \geq 3$. A $2n$ csúcsú G egyszerű gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és $u_1, u_2, \ldots, u_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok között minden él be van húzva, és az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsok között is minden él be van húzva. Ezen kívül össze van kötve v_1 u_1-gyel és v_2 u_2-vel. Hány különböző Hamilton köre van G-nek? (Két Hamilton kör különböző, ha legalább egy élben különböznek.)

Egy tetszőleges Hamilton körnek legalább két olyan éle van, amelynek egyik vége a $v_1, v_2, \ldots, v_n$, másik vége az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsok között van. (Vagyis egy tetszőleges Hamilton körnek át kell mennie a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsoktól az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokhoz, és vissza is kell mennie.) Mivel összesen csak két ilyen él van az egész gráfban, v_1u_1 és v_2u_2, ezért ezek mindenképpen benne vannak a Hamilton körben. 2 pont

Tehát a Hamilton kör a v_1 csúcsból indulva végígmegy a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, úgy, hogy az utolsó a v_2, onnan átmegy az u_2-be, és vegígmegy az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokon, úgy, hogy az utolsó az u_1, onnan pedig visszamegy a v_1-be. 3 pont

A $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsokon $(n-2)!$-féleképpen lehet a feltételeknek megfelelően végigmenni, és az $u_1, u_2, \dots, u_n$ csúcsokon is. 3 pont

Tehát G-nek $(n-2)!^2$ Hamilton köre van. 2 pont

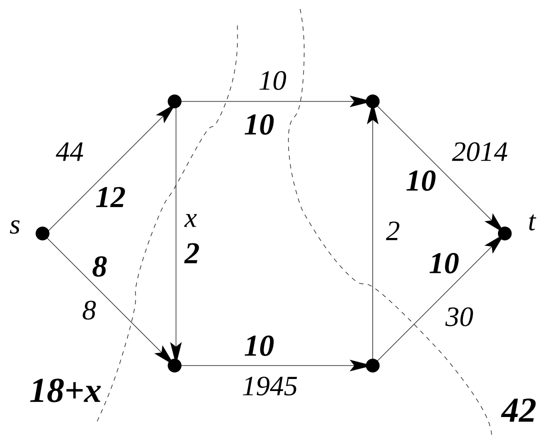
4. A K_n teljes n csúcsú gráf ($n \geq 3$) élein pozitív súlyok vannak, e egy rögzített él. Az e élnek az a tulajdonsága, hogy minden e-t tartalmazó feszítőfa minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy az e él súlya minimális, vagyis nincs olyan él, amelynek nála kisebb a súlya.

Jelöljük s-sel a súlyfüggvényt. Legyen f egy tetszőleges, e-től különböző él. Legyen H egy Hamilton kör, amely e és f-et is tartalmazza. 3 pont

Ekkor $H-e$ és $H-f$ is feszítőfa, $s(H-e) = s(H) - s(e)$, $s(H-f) = s(H) - s(f)$. 3 pont

Viszont $H-f$ tartalmazza e-t, tehát a feltétel szerint minimális összsúlyú, vagyis $s(H-e) \geq s(H-f)$, $s(H) - s(e) \geq s(H) - s(f)$, tehát $s(e) \leq s(f)$. 4 pont

5. Tetszőleges $x \geq 0$ számra legyen $m(x)$ az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága. Határozzuk meg az összes olyan x számot, amelyre $20 \leq m(x) \leq 50$.



A hálózatban található egy $18+x$ kapacitású vágás (ábra) ennek alapján $m(x) \leq 18+x$. Tehát ha $20 \leq m(x)$ akkor $x \geq 2$. 3 pont

Ha viszont $x \geq 2$ akkor létezik 20 nagyságú folyam (ábra). 3 pont

Ugyanakkor van egy 42 kapacitású vágás is (ábra), tehát a maximális folyam ennél nem lehet több. Vagyis az $m(x) \leq 50$ feltétel minden x-re teljesül. 3 pont

Ezek alapján $20 \leq m(x) \leq 50$ akkor és csak akkor, ha $x \geq 2$. 1 pont

6. A G teljes gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_{25}$ és $v_1, v_2, \dots, v_{25}$. Az $u_i u_j$, $v_i v_j$ $(1 \leq i < j \leq 25)$ élek súlya 1, az összes többi él súlya 2. Hány minimális összsúlyú feszítőfája van G–nek?

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus előállítja az összes minimális összsúlyú feszítőfát. Itt a mohó algoritmus kiválasztana egy feszítőfát a $v_1, v_2, \dots, v_{25}$ csúcsokon, egy másik feszítőfát az $u_1, u_2, \dots, u_{25}$ csúcsokon, majd egy $u_i v_j$ éllel összeköti őket. 4 pont

Meg kell számolnunk, hogy hány ilyen fa van. A Cayley tétel alapján a $v_1, v_2, \dots, v_{25}$ csúcsokon 25^{23} feszítőfa van és az $u_1, u_2, \dots, u_{25}$ csúcsokon is ugyanennyi. 3 pont

A két fát 25^2-féleképpen köthetjük össze egy éllel. 2 pont

Tehát $25^2 \cdot 25^{23} \cdot 25^{23} = 25^{48}$ darab minimális összsúlyú feszítőfája van G–nek. 1 pont